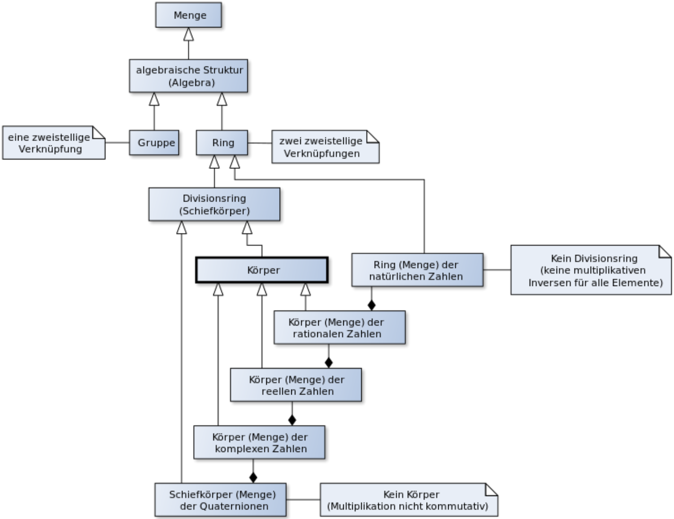
Euklidische Vektorräume

Irene Winkler & Nico Görnitz

Arbeitsgruppe Maschinelles Lernen

Algebraische Strukturen



Funktionen

Eine Funktion $f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$ heisst

- **injektiv**
  - wenn fuer alle $x, y \in X$ mit $f(x) = f(y)$ folgt, dass $x = y$ ist.
  - Zu jedem x gibt es genau 1 $f(x)$.
- **surjektiv**
  - wenn $f(X) = Y$ ist.
  - Also wenn alle Elemente in Y von X aus "angesprochen" werden koennen.
- **bijektiv***
  - wenn f injektiv und surjektiv ist.
  - D.h. alle Elemente von $x \in X$ zeigen auf genau 1 $y \in Y$ und es gibt keine "unbenutzten" Elemente in Y.

Vektorräume

Vektoren sind ...

- die Elemente eines Vektorraums
- können miteinander addiert werden
- können mit einem Skalar multipliziert werden

Beispiele: $\mathbb{R}^n$, Raum der Matrizen, Raum der reellwertigen Funktionen auf $[-1, 1]$, $\ldots$

Vektorräume

Definition. Ein *reeller Vektorraum* ist eine Menge V zusammen mit einer Abbildung $+ : V \times V \mapsto V$ ("Addition") und einer Abbildung $\cdot : \mathbb{R} \times V \mapsto V$ ("skalare Multiplikation") mit

- (V,+) ist eine abelsche Gruppe ist, d.h.
  - Die Addition ist assoziativ und kommutativ
  - Es existiert ein Element $0 \in V$ ("Nullvektor")
  - Zu jedem $\mathbf{v} \in V$ gibt es ein inverses Element
- Für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:
  - $\lambda(\mu\mathbf{v}) = (\lambda\mu)\mathbf{v}$
  - $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$
  - $\lambda(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \lambda\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}$, $(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}$

Untervektorräume

Definition. Sei V ein reeller Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subset V$ heisst *Untervektorraum von V* wenn $U \neq \emptyset$ und U abgeschlossen bzgl. der Addition und der Skalarmultiplikation ist, d.h.

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in U, \lambda \in \mathbb{R} : \mathbf{v} + \mathbf{w} \in U \text{ und } \lambda \mathbf{v} \in U.$$

Ist U ein Untervektorraum von V, so ist U ein Vektorraum.

Beispiele: alle n-Tupel, die ein bestimmtes Gleichungssystem lösen; Raum der differenzierbaren reelwertigen Funktionen auf $[-1, 1]$, ...

Aufgespannter Raum

Definition und Satz. Seien $\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_n \in V$ Elemente eines Vektorraums V. Die Menge

$$\{\lambda_1 \mathbf{v_1} + \ldots + \lambda_n \mathbf{v_n} | \lambda_i \in \mathbb{R}\} \subset V$$

ist ein Unterverktorraum von V und heißt *lineare Hülle* bzw. der von $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$ *aufgespannte / erzeugte Raum*.

Lineare Unabhängigkeit

Definition. Sie V ein reeller Vektorraum. Die Vektoren $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n} \in V$ heißen *linear unabhängig*, wenn

$$\lambda_1 \mathbf{v_1} + \ldots + \lambda_n \mathbf{v_n} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

Äquivalent dazu: wenn sich keiner der Vektoren als Linearkombination der anderen darstellen lässt.

Basis und Dimension

Definition. Sei V ein reeller Vektorraum. Vektoren $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n} \in V$ bilden eine *Basis von V*, wenn sie linear unabhängig sind und wenn jedes $\mathbf{v} \in V$ Linearkombination der $\mathbf{v_i}$ ist.

Satz und Definition. Je zwei endliche Basen eines reellen Vektorraumes V haben gleiche Länge. Diese Länge ist die *Dimension* des Vektorraums.

Satz. Ist $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$ eine Basis von V, dann gibt es zu jedem $\mathbf{v} \in V$ *genau eine* Linearkombination.

Euklidische Vektorräume

- Zusätzliche Struktur auf Vektorräumen: Länge, Abstand, Winkel
- $\Rightarrow$ Norm, Skalarprodukt

Norm - Länge eines Vektors

Definition. Sei V ein reeller Vektorraum. Eine *Norm* ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \mapsto \mathbb{R}^+$ mit folgende Eigenschaften:

1. $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ und $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = 0$
2. $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ (Dreiecksungleichung)
3. $\|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda|\|\mathbf{v}\|$

für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

Beispiele auf $\mathbb{R}^n$:

- 2-Norm $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- 1-Norm $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- max-Norm $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1}^n |x_i|$

Skalarprodukt

Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^2$:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Was bedeutet das?

- Es gilt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \cos(\angle \mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$
- Für $\|\mathbf{x}\| = 1$: Länge der Projektion von $\mathbf{y}$ auf $\mathbf{x}$

Skalarprodukt

Definition. Sei V ein reeller Vektorraum. Unter einem *Skalar* - oder *innerem Produkt auf V* versteht man eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ mit folgende Eigenschaften:

1. bilinear: $\langle\lambda\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = \lambda\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = \langle\mathbf{v},\lambda\mathbf{w}\rangle$,
   $\langle\mathbf{v}+\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle = \langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle + \langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle$, $\langle\mathbf{v},\mathbf{w}+\mathbf{u}\rangle = \langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle + \langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle$
2. symmetrisch: $\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = \langle\mathbf{w},\mathbf{v}\rangle$
3. positiv definit: $\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle \geq 0$ und $\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = 0$

für alle $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

Skalarprodukt: Beispiele

- Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \mathbf{x}^T \mathbf{y} \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n)$$

- Auf $\mathbb{R}^n$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \lambda_1 x_1 y_1 + \ldots + \lambda_n x_n y_n \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n)$$

- Auf $\mathcal{F} = L_2(X) = \left\{ f : X \mapsto \mathbb{R} \mid \int_X f(x)^2 dx < \infty \right\}$, dem Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen auf einem kompakten $X \subset \mathbb{R}^n$

$$\langle f, g \rangle := \int_X f(x) g(x) dx \qquad (f, g \in \mathcal{F})$$

Skalarprodukt

Definition. Unter einem *euklidischen Vektorraum* versteht man ein Paar $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bestehend aus einem reellen Vektorraum V und einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V.

Hilbertraum: Ein reeller oder komplexer Vektorraum zusammen mit einem Skalarprodukt, der vollständig bezüglich der durch das Skalarprodukt induzierten Metrik ist (d.h. in dem jede Cauchy-Folge konvergiert).

Euklidische Norm

Satz und Definition. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Das Skalarprodukt induziert eine Norm $\|\mathbf{v}\| := \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$ ($\mathbf{v} \in V$), die *euklidische Norm* genannt wird.

Satz (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung). Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Dann gilt

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V : |\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|$$

Orthogonale Vektoren

Definition. Zwei Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ eines euklidischen Vektorraumes heißen *orthogonal zueinander* $(\mathbf{v} \perp \mathbf{w})$ wenn $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$.

Definition. Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ in einem euklidischen Vektorraum heißen *orthonormal* oder *Orthonormalsystem* wenn $\|\mathbf{v}_i\| = 1$ für alle i und $\mathbf{v}_i \perp \mathbf{v}_j$ für $i \neq j$.

Orthonomale Basis

Definition. Eine Basis eines euklidischen Vektorraums aus orthonormalen Vektoren wird *Orthonormalbasis* genannt.

Satz. Ist $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ eine Orthonomalbasis eines euklidischen Vektorraums $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, so gilt für jedes $\mathbf{x} \in V$:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle \, \mathbf{v}_i$$

Orthogonale Projektion

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und U ein r -dimensionaler Untervektorraum mit einer Orthonormalbasis $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$.
Die orthogonale Projektion eines Vektors $\mathbf{v} \in V$ auf U ist gegeben durch

$$p(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{r} \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle \, \mathbf{u}_i$$

.