Lineare Abbildungen, Matrizen, Determinante

Irene Winkler & Nico Görnitz

Arbeitsgruppe Maschinelles Lernen

Matrizen als Lineare Abbildungen

Matrixrechnung

Determinante

Lineare Abbildungen

Definition. Seien V und W reelle Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \mapsto W$ heisst *linear* wenn

1. $f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w})$ und
2. $f(\lambda \mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v})$

für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

Lineare Abbildung

Eine Funktion $f : V \to W, \quad x \mapsto f(x)$ heisst

- **Homomorphismus**
  - wenn es eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen V und W ist.
- **Isomorphismus**
  - Wenn die lineare Abbildung *bijektiv* ist.
  - D.h. wenn es eine Umkehrabbildung geben kann.
- **Endomorphismus**
  - wenn $W = V$ ist.

Lineare Abbildungen

Seien V und W reelle Vektorräume, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ eine Basis von V und $f : V \mapsto W$ eine linear Abbildung.

Linearität $\Rightarrow$ für jedes $\mathbf{v} \in V$ gilt:

$$f(\mathbf{v}) = f(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n) = \lambda_1 f(\mathbf{v}_1) + \ldots + \lambda_n f(\mathbf{v}_n)$$

$\Rightarrow$ Es genügt die Bilder der Basisvektoren zu kennen, um die ganze Funktion zu charakterisieren!

$\Rightarrow$ repräsentierbar als Matrix, in der die Koordinaten von $\mathbf{v}$ auf Koordinaten von $f(\mathbf{v})$ abgebildet werden.

Matrizen

Sei $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Wir wollen sie charakterisieren durch $g(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$ für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und A eine $m \times n$ Matrix.

$$g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Wie muss A aussehen?

Es genügt, die Bilder der Basisvektoren $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ zu kennen. Die Spalten der Matrix A sind die Bilder der Einheitsvektoren!

Beispiele

- Identitätsmatrix I
- $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ Drehung um 90°
- $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ Spiegelung an der x-Achse
- $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ Projektion auf die Gerade durch $(0, 0)$ und $(1, 1)$

Matrixrechnung

- Addition
- Skalarmultiplikation
- Multiplikation

Rang

Definition: Der Rang einer Matrix ist die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten (äquivalent: Zeilen).

Der Rang ist die Dimensionalität des Bildes von der durch A beschriebenen Abbildung.

Inverse Matrix

Definition: Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist *invertierbar (regulär, nichtsingulär)*, wenn eine weitere Matrix A^{-1} existiert, sodass

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Es gilt:

- A ist genau dann invertierbar, wenn $\text{rang}(A) = n$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Weiteres

- Spur einer quadratischen Matrix = Summe der Hauptdiagonalelemente.
  Für $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt

$$\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$$

  .

- Sind $A^T, B^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ die transponierten Matrizen zu $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ dann

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T,$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Wichtige Matrizen

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische, reelle Matrix.

- A ist *orthogonal* wenn $AA^T = A^T A = I_n$.
  Orthogonale Matrizen stellen Spiegelungen und Drehungen im Raum dar.
- A ist *symmetrisch* wenn $A = A^T$
- A ist *antisymmetrisch* wenn $A = -A^T$
- A ist *diagonal* wenn alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonale 0 sind

Determinante

Die Determinante einer quadratischen Matrix ist eine Zahl. Was bedeutet sie anschaulich?

- Absolutbetrag: das Volumen des Parallelotops das durch die Zeilen- oder Spaltenvektoren aufgespannt wird
- Vorzeichen: Orientierung des Parallelotops

Determinante

Satz und Definition: Es gibt genau eine Abbildung
det : $\mathbb{R}^{n\times n} \ni A \mapsto \det A \in \mathbb{R}$ mit

1. $\det$ ist linear in jeder Zeile
2. Ist der (Zeilen-) rang kleiner als n, so ist $\det A = 0$
3. $\det I_n = 1$

Diese Abbildung heisst *Determinante*.

Determinante - Regeln

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zwei quadratische Matrizen und $\lambda \in \mathbb{R}$

- Ist A eine Dreiecksmatrix, dann ist die Determinante das Produkt der Hauptdiagonalelemente von A
- A ist genau dann invertierbar, wenn $\det A \neq 0$
- $\det AB = \det A \det B$
- $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$
- $\det A = \det A^T$
- $\det \lambda A = \lambda^n \det A$
- $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$