

# Eigenwerte und Eigenvektoren

Irene Winkler & Nico Görnitz

Arbeitsgruppe Maschinelles Lernen

Einleitung

Berechnung

Diagonalisierbarkeit

Symmetrische Matrizen

# Einleitung

**Definition.** Ein *Eigenvektor* einer quadratischen Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  zum *Eigenwert*  $\lambda \in \mathbb{C}$  ist ein Vektor  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  der durch  $A$  auf ein Vielfaches  $\lambda \mathbf{v}$  von sich selbst abgebildet wird:

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

## Berechnung

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine quadratische Matrix. Dann gilt für jeden Eigenvektor  $\mathbf{v}$

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$$

$\Rightarrow (A - \lambda I)$  muss singularär sein

1. Berechne die Eigenwerte als Nullstellen des *charakteristischen Polynoms*  $P(\lambda) := \det(A - \lambda I)$ . Dieses Polynom besitzt Grad  $n$ .
2. Bestimme für jeden der ermittelten reellen Eigenwerte  $\lambda_i$  eine Basis des Vektorraums  $\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda_i I)\mathbf{v} = 0\}$ .

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine quadratische Matrix. Es gilt:

- ▶ Es gibt höchstens  $n$  reelle Eigenwerte und höchstens  $n$  linear unabhängige Eigenvektoren.
- ▶ Es muss nicht  $n$  linear unabhängige Eigenvektoren geben, selbst wenn es  $n$  reelle Nullstellen des charakteristischen Polynoms gibt.
- ▶ Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.
- ▶  $A$  besitzt  $n$  paarweise verschiedene Eigenwerte  $\Rightarrow A$  besitzt  $n$  linear unabhängige Eigenvektoren

# Diagonalisierbarkeit

**Definition.** Eine quadratische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt *diagonalisierbar* falls es eine invertierbare Matrix  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und eine Diagonalmatrix  $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gibt, so dass

$$\Lambda = S^{-1}AS.$$

$A = S\Lambda S^{-1}$  nennt man auch *Eigenzerlegung* von  $A$ .

**Es gilt:**

- ▶  $A$  besitzt  $n$  linear unabhängige Eigenvektoren  
 $\Leftrightarrow A$  diagonalisierbar
- ▶ Die Spalten von  $S$  sind Eigenvektoren von  $A$ , die Diagonale von  $\Lambda$  enthält die zugehörigen Eigenwerte.

## Eigenschaften diagonalisierbarer Matrizen

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  diagonalisierbar mit  $A = S\Lambda S^{-1}$ .

- ▶ Alle Eigenwerte  $\neq 0 \Leftrightarrow A$  invertierbar und

$$A^{-1} = (S\Lambda S^{-1})^{-1} = S\Lambda^{-1}S^{-1}$$

- ▶ Diagonalisierung erleichtert Potenzierung von  $A$ :

$$A^p = S\Lambda^p S^{-1} \text{ für } p \in \mathbb{N}$$

- ▶ Die Determinante ist das Produkt der Eigenwerte.
- ▶ Die Spur ist die Summe der Eigenwerte.

# Eigenvektoren und -werte symmetrischer Matrizen

Für jede symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt

- ▶ Die Eigenwerte sind reell.
- ▶ Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.
- ▶ Es lassen sich immer  $n$  orthogonale Eigenvektoren finden.
- ▶  $A$  lässt sich zerlegen in

$$A = U \Lambda U^T$$

wobei  $U$  eine orthogonale Matrix mit Eigenvektoren als Spalten und  $\Lambda$  die Diagonalmatrix mit den zugehörigen Eigenwerten auf der Diagonalen.



## Positiv-Definitheit

**Definition.** Eine quadratische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt

<i>positiv definit</i>	falls $\mathbf{v}^T A \mathbf{v} > 0$
<i>positiv semidefinit</i>	falls $\mathbf{v}^T A \mathbf{v} \geq 0$
<i>negativ definit</i>	falls $\mathbf{v}^T A \mathbf{v} < 0$
<i>negativ semidefinit</i>	falls $\mathbf{v}^T A \mathbf{v} \leq 0$
	für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

**Satz.** Für jede symmetrische Matrix  $A$  gilt:

$A$ positiv definit	$\Leftrightarrow$	alle Eigenwerte $> 0$
$A$ positiv semidefinit	$\Leftrightarrow$	alle Eigenwerte $\geq 0$
$A$ negativ definit	$\Leftrightarrow$	alle Eigenwerte $< 0$
$A$ negativ semidefinit	$\Leftrightarrow$	alle Eigenwerte $\leq 0$

- ▶ Die wichtigsten Gleichungen für das Rechnen mit Matrizen:  
K. B. Petersen, M. S. Pedersen (2007) *The Matrix Cookbook*.  
[http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/views/publication\\_details.php?id=3274](http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/views/publication_details.php?id=3274)