

## Tag 2: Matrizen

### Hausaufgaben

Abgabeschluss für diese Aufgaben ist morgen um 10:00 Uhr.

#### Aufgabe 1 (10 Punkte)

1. Welche der folgenden Aussagen ist falsch: Ist  $f : V \mapsto W$  eine lineare Abbildung, so gilt
  - $f(\lambda \mathbf{x}) = f(\lambda) + f(\mathbf{x})$  für alle  $\mathbf{x} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$
  - $f(0) = 0$
  - $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$  für alle  $\mathbf{x} \in V$
2. Die Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (x + y, y - x) \in \mathbb{R}^2$  ist durch die folgende Matrix gegeben:
  - $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
3. Welches der folgenden Produkte von Matrizen ist Null:
  - $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$
4. Der Rang der Matrix  $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$  ist
  - 1
  - 3
  - 4
5. Für jede symmetrische, invertierbare Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und Vektoren  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  gilt:
  - $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, A\mathbf{w} \rangle$
  - $\langle A\mathbf{v}, A\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
  - $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{w} \rangle$
6. Die Determinante ist eine Abbildung
  - $\mathbb{R}^{n \times n} \mapsto \mathbb{R}^{n-1}$ , die das Volumen der Projektion auf  $\mathbb{R}^{n-1}$  angibt.
  - $\mathbb{R}^{n \times n} \mapsto \mathbb{R}$ , die linear in den Zeilen ist, für nicht invertierbare Matrizen verschwindet und für  $I$  den Wert 1 annimmt.
  - $\mathbb{R}^{n \times n} \mapsto \mathbb{R}^n$ , die linear in den Zeilen ist, für nicht invertierbare Matrizen verschwindet und für  $I$  den Wert 1 annimmt.
7. Welche der folgenden Aussagen ist richtig: Für jede quadratische  $n \times n$  Matrix  $A$  gilt
  - $\det A = 0 \Rightarrow \text{rang } A = 0$
  - $\det A = 0 \Leftrightarrow \text{rang } A < n$
  - $\text{rang } A = n \Rightarrow \det A = n$

8. Welche der folgenden Matrizen ist orthogonal:

$$\square \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9. Es seien  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Standardskalarprodukt des  $\mathbb{R}^n$  und  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine beliebige quadratische Matrix mit vollem Rang. Welche der folgenden Abbildungen von  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}$  definiert ein Skalarprodukt auf dem  $\mathbb{R}^n$ ?

- $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  für  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$
- $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle$  für  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$
- $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \langle A\mathbf{x}, A^T\mathbf{y} \rangle$  für  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

10. Welche der folgenden Mengen von  $n \times n$  Matrizen bildet zusammen mit der Matrixaddition und Skalarmultiplikation keinen reellen Vektorraum?

- Die symmetrischen Matrizen  $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | A^T = A\}$
- Die orthogonalen Matrizen  $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | AA^T = A^T A = I_n\}$
- Die oberen Dreiecksmatrizen  $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | A_{ij} = 0 \text{ für } i > j\}$

### Aufgabe 2 (5 Punkte)

Beschreibe in Worten, welche Abbildung durch die folgenden Matrizen beschrieben werden. Wie groß sind ihre Determinanten?

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei  $\mathcal{U}$  ein  $r$ -dimensionaler Untervektorraum des  $\mathbb{R}^n$  mit einer Basis  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \in \mathbb{R}^n$ . Sei  $U := (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r) \in \mathbb{R}^{n \times r}$  die Matrix, die die  $\mathbf{u}_i$  als Spalten enthält. Die orthogonale Projektionsmatrix von  $\mathbb{R}^n$  auf  $\mathcal{U}$  ist gegeben durch  $P := U(U^T U)^{-1} U^T$ .

1. Berechne das Produkt  $P \cdot P$ . Was bedeutet das Ergebnis intuitiv?
2. Konstruiere die  $3 \times 3$  Matrix, die die orthogonale Projektion auf den von den Vektoren  $(3, 4, 0)^T$  und  $(1, 0, 0)^T$  aufgespannten Raum beschreibt.