Mathematische Grundlagen
für Maschinelles Lernen

Sommersemester 2013

Fachgebiet Maschinelles Lernen
Institut für Softwaretechnik und
theoretische Informatik
Fakultät IV, Technische Universität Berlin
Prof. Dr. Klaus-Robert Müller

Tag 3: Eigenwerte und Eigenvektoren

Hausaufgaben

Abgabeschluss für diese Aufgaben ist morgen um 10:00 Uhr.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

1. Wenn $A(-\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ dann ist

   ☐ $\mathbf{v}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ

   ☐ $-\mathbf{v}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ

   ☐ $-\mathbf{v}$ Eigenvektor zum Eigenwert $-\lambda$

2. Sei A eine $n\times n$ quadratische Matrix mit r paarweise voneinander verschiedenen Eigenwerten. Dann ist die Dimension des von allen Eigenvektoren von A aufgespannten Raumes

   ☐ gleich r ☐ $\leq r$ ☐ $\geq r$

3. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und es gelte $A = ZBZ^{-1}$ für eine invertierbare Matrix $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann haben A und B

   ☐ Die gleichen Eigenvektoren und Eigenwerte

   ☐ Die gleichen Eigenwerte, aber nicht notwendigerweise gleiche Eigenvektoren

   ☐ Die gleichen Eigenvektoren, aber nicht notwendigerweise gleiche Eigenwerte

4. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix. Dann haben A und A^{-1}

   ☐ Die gleichen Eigenvektoren und Eigenwerte

   ☐ Die gleichen Eigenwerte, aber nicht notwendigerweise gleiche Eigenvektoren

   ☐ Die gleichen Eigenvektoren, aber nicht notwendigerweise gleiche Eigenwerte

5. Sei A eine quadratische Matrix und λ ein Eigenwert von A. Dann ist für jedes $p \in \mathbb{N}$

   ☐ λ ein Eigenwert von A^p

   ☐ λ^p ein Eigenwert von A^p

   ☐ λ^{-p} ein Eigenwert von A^p

6. Sei A eine symmetrische $n \times n$ Matrix und seien $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ linear unabhängig Eigenvektoren von A mit $\|\mathbf{v}_i\| = 1$ für $i = 1, \ldots n$. Sei U die Matrix, deren Spalten $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ enthalten. Ist dann $U^T U = I$?

   ☐ Ja, denn Eigenvektoren symmetrischer Matrizen stehen senkrecht aufeinander.

   ☐ Nein, denn Vektorräume von Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert können mehrdimensional sein.

   ☐ Ja, denn linear unabhängige Eigenvektoren stehen senkrecht aufeinander.

7. Eine symmetrische $n \times n$ Matrix A habe nur einen Eigenwert λ. Dann
   - □ ist $n = 1$
   - □ ist A eine Diagonalmatrix.
   - □ ist A nicht invertierbar.
8. Die Eigenwerte einer symmetrischen $n \times n$ Matrix A seien alle 0. Dann
   - □ ist $n = 1$.
   - □ ist A die Nullmatrix.
   - □ ist A eine Diagonalmatrix.
9. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und es gelte $A = ZBZ^{-1}$ für eine invertierbare Matrix $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?
   - □ $\det A = \det B$
   - □ $\operatorname{Spur} A = \operatorname{Spur} B$
   - □ B symmetrisch $\Leftrightarrow$ A symmetrisch
10. Sei A eine positiv-definite Matrix. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?
    - □ Alle Einträge von A sind positiv.
    - □ $\operatorname{Spur} A > 0$
    - □ $A - I$ ist positiv-definit.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Konstruiere eine 2×2 Matrix A mit den folgenden Eigenwerten und -vektoren:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 2$$

Überprüfe das Resultat.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei A eine quadratische Matrix und $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ . Sei $\pi \in \mathbb{R}$. Gebe einen Eigenwert von $A - \pi I$ an.