

Euklidische Vektorräume

Irene Winkler & Nico Görnitz

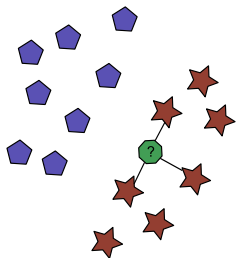
Arbeitsgruppe Maschinelles Lernen

Maschinelles Lernen = Lernen aus Daten

z.B. Bildklassifikation, Spamerkennung, DNA-Segmentierung, ...
Vorgehensweise:

- 1 Extraction von Merkmalen und Repräsentation als Vektoren
- 2 Anwendung von Methoden aus Linearer Algebra, Stochastik, ... um aus den Datenpunkten zu lernen
- 3 Anwendung des Gelernten

Beispiel: k -Nearest-Neighbor-Klassifikation



- Gegeben sind Trainingsdaten und dazugehörige Labels
- Ein (nicht gesehener) Testdatenpunkt v erhält das label seiner k -nächsten Nachbarn

Vektorräume

Vektoren sind ...

- die Elemente eines Vektorraums
- können miteinander addiert werden
- können mit einem Skalar multipliziert werden

Beispiele: \mathbb{R}^n , Raum der Matrizen, Raum der reellwertigen Funktionen auf $[-1, 1]$, ...

Vektorräume

Definition. Ein *reeller Vektorraum* ist eine Menge V zusammen mit einer Abbildung $+$: $V \times V \mapsto V$ (Addition) und einer Abbildung \cdot : $\mathbb{R} \times V \mapsto V$ (skalare Multiplikation) mit

- $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe ist, d.h.
 - Die Addition ist assoziativ und kommutativ
 - Es existiert ein Element $0 \in V$ ("Nullvektor")
 - Zu jedem $\mathbf{v} \in V$ gibt es ein inverses Element
- Für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:
 - $\lambda(\mu\mathbf{v}) = (\lambda\mu)\mathbf{v}$
 - $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$
 - $\lambda(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \lambda\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}$, $(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}$

Untervektorräume

Definition. Sei V ein reeller Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subset V$ heisst *Untervektorraum von V* wenn $U \neq \emptyset$ und U abgeschlossen bzgl. der Addition und der Skalarmultiplikation ist, d.h.

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in U, \lambda \in \mathbb{R} : \mathbf{v} + \mathbf{w} \in U \text{ und } \lambda \mathbf{v} \in U.$$

Ist U ein Untervektorraum von V , so ist U ein Vektorraum.

Beispiele: alle n -Tupel, die ein bestimmtes Gleichungssystem lösen;
Raum der differenzierbaren reelwertigen Funktionen auf $[-1, 1]$, ...

Lineare Unabhängigkeit

Definition. Sei V ein reeller Vektorraum. Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ heißen *linear unabhängig*, wenn

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

Äquivalent dazu: wenn sich keiner der Vektoren als Linearkombination der anderen darstellen lässt.

Basis & Dimension

Definition. Sei V ein reeller Vektorraum. Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ bilden eine *Basis von V* , wenn sie linear unabhängig sind und wenn jedes $\mathbf{v} \in V$ Linearkombination der \mathbf{v}_i ist.

Satz und Definition. Je zwei endliche Basen eines reellen Vektorraumes V haben gleiche Länge. Diese Länge ist die *Dimension* des Vektorraums.

Satz. Ist $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ eine Basis von V , dann gibt es zu jedem $\mathbf{v} \in V$ *genau eine* Linearkombination.

Euklidische Vektorräume

- Zusätzliche Struktur auf Vektorräumen: Länge, Abstand, Winkel
- \Rightarrow Norm, Skalarprodukt

Norm - Länge eines Vektors

Definition. Sei V ein reeller Vektorraum. Eine *Norm* ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \mapsto \mathbb{R}^+$ mit folgende Eigenschaften:

- ① $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ und $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = 0$
- ② $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ (Dreiecksungleichung)
- ③ $\|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda|\|\mathbf{v}\|$

für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

Beispiele auf \mathbb{R}^n :

- 2-Norm $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- 1-Norm $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- max-Norm $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1}^n |x_i|$

Skalarprodukt

Standardskalarprodukt im \mathbb{R}^2 :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Was bedeutet das?

- Es gilt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \cos(\angle \mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$
- Für $\|\mathbf{x}\| = 1$: Länge der Projektion von \mathbf{y} auf \mathbf{x}

Skalarprodukt

Definition. Sei V ein reeller Vektorraum. Unter einem *Skalar-* oder *innerem Produkt auf V* versteht man eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ mit folgende Eigenschaften:

- ① bilinear: $\langle \lambda \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \lambda \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \lambda \mathbf{w} \rangle$,
 $\langle \mathbf{v} + \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} + \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$
- ② symmetrisch: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$
- ③ positiv definit: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ und $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = 0$

für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

Satz (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung). Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Dann gilt

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V : |\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|$$

Skalarprodukt: Beispiele

- Standardskalarprodukt auf dem \mathbb{R}^n :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := x_1y_1 + \dots + x_ny_n = \mathbf{x}^T \mathbf{y} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n)$$

- Auf \mathbb{R}^n mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \lambda_1x_1y_1 + \dots + \lambda_nx_ny_n \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n)$$

- Auf $\mathcal{F} = L_2(X) = \{f : X \mapsto \mathbb{R} \mid \int_X f(x)^2 dx < \infty\}$, dem Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen auf einem kompakten $X \subset \mathbb{R}^n$

$$\langle f, g \rangle := \int_X f(x)g(x)dx \quad (f, g \in \mathcal{F})$$

Skalarprodukt

Definition. Unter einem *euklidischen Vektorraum* versteht man ein Paar $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bestehend aus einem reellen Vektorraum V und einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V .

Hilbertraum: Ein reeller oder komplexer Vektorraum zusammen mit einem Skalarprodukt, der vollständig bezüglich der durch das Skalarprodukt induzierten Metrik ist (d.h. in dem jede Cauchy-Folge konvergiert).

Euklidische Norm

Satz und Definition. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Das Skalarprodukt induziert eine Norm $\|\mathbf{v}\| := \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$ ($\mathbf{v} \in V$), die *euklidische Norm* genannt wird.

Orthogonale Vektoren

Definition. Zwei Vektoren \mathbf{v}, \mathbf{w} eines euklidischen Vektorraumes heißen *orthogonal zueinander* ($\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$) wenn $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$.

Definition. Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ in einem euklidischen Vektorraum heißen *orthonormal* oder *Orthonormalsystem* wenn $\|\mathbf{v}_i\| = 1$ für alle i und $\mathbf{v}_i \perp \mathbf{v}_j$ für $i \neq j$.

Orthonormalbasis

Definition. Eine Basis eines euklidischen Vektorraums aus orthonormalen Vektoren wird *Orthonormalbasis* genannt.

Satz. Ist $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ eine Orthonormalbasis eines euklidischen Vektorraums $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, so gilt für jedes $\mathbf{x} \in V$:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i$$

Das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren erzeugt zu jeder Basis eine Orthonormalbasis, die denselben Vektorraum erzeugt.

Orthogonale Projektion

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und U ein r -dimensionaler Untervektorraum mit einer Orthonormalbasis $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$. Die **orthogonale Projektion** eines Vektors $\mathbf{v} \in V$ auf U ist gegeben durch

$$p(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^r \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i$$

