Mathematische Grundlagen
für Maschinelles Lernen

Wintersemester 2013

Fachgebiet Maschinelles Lernen
Institut für Softwaretechnik und
theoretische Informatik
Fakultät IV, Technische Universität Berlin
Prof. Dr. Klaus-Robert Müller

Tag 3: Eigenwerte und Eigenvektoren

Übungsaufgaben

Aufgabe 1

1. Damit von den Eigenwerten einer reellen Matrix A überhaupt gesprochen werden kann, muss A

   □ symmetrisch sein.

   □ invertierbar sein.

   □ quadratisch sein.

2. Welcher der folgenden Vektoren ist Eigenvektor von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?

   □ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Das charakteristische Polynom von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch?

   □ $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 10$ □ $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 10$ □ $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$

4. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ eine reelle Nullstelle des characteristischen Polynoms. Dann gilt

   □ Über die Dimension des von den Eigenvektoren zum Eigenwert λ aufgespannte Raum kann nichts gesagt werden, ausser dass sie ≥ 1 und $\leq n$ ist.

   □ Es gibt höchstens n Eigenvektoren mit Norm 1 zum Eigenwert λ.

   □ Es gibt unter Umständen gar keine Eigenvektoren zum Eigenwert λ.

5. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix dessen charakteristischen Polynoms n reelle Nullstellen hat. Dann gilt

   □ A ist diagonalisierbar.

   □ A ist genau dann diagonalisierbar wenn die Nullstellen paarweise voneinander verschieden sind.

   □ Wenn die Nullstellen paarweise voneinander verschieden sind ist A ist diagonalisierbar. Die Rückrichtung gilt aber nicht.

6. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix dessen charakteristischen Polynoms n reelle Nullstellen hat. Dann gilt

   □ A ist symmetrisch.

   □ Wenn A ausserdem symmetrisch ist, so stehen die Eigenvektoren von voneinander verschiedenen Eigenwerten senkrecht aufeinander.

   □ Wenn A ausserdem symmetrisch ist, so sind die Nullstellen paarweise voneinander verschieden sind.

7. Sei A eine invertierbare Matrix und λ ein Eigenwert von A. Dann ist

   - □ λ ein Eigenwert von A^{-1}
   - □ $-\lambda$ ein Eigenwert von A^{-1}
   - □ $1/\lambda$ ein Eigenwert von A^{-1}

8. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix und $p \in \mathbb{N}$. Dann haben A und A^p

   - □ Die gleichen Eigenvektoren und Eigenwerte
   - □ Die gleichen Eigenwerte, aber nicht notwendigerweise gleiche Eigenvektoren
   - □ Die gleichen Eigenvektoren, aber nicht notwendigerweise gleiche Eigenwerte

9. Eine Eigenzerlegung einer reellen symmetrische Matrix A durchzuführen bedeutet

   - □ Eine symmetrische Matrix U zu finden, so dass $U^{-1}AU$ eine Diagonalmatrix ist.
   - □ Eine orthogonale Matrix U zu finden, so dass $U^{-1}AU$ eine Diagonalmatrix ist.
   - □ Eine invertierbare Matrix U zu finden, so dass $U^{-1}AU$ eine Diagonalmatrix ist.

10. Welche der folgenden Matrizen ist postiv-definit?

    □ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Berechne die Determinante und die Spur der Matrix.

Aufgabe 3

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix und $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, mit $\lambda \neq \mu$. Zeige: v und w sind linear unabhängig.

Aufgabe 4

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix und $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, mit $\lambda \neq \mu$. Zeige: $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ sind orthogonal, d.h. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$.
Hinweis: $\lambda \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \ldots$.

Aufgabe 5

Ziel dieser Aufgabe ist es, die lineare Abbildung, die durch $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ beschrieben wird, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, zu visualisieren. Zwei orthogonale Eigenvektoren von A sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, die dazugehörigen Eigenwerte 1 und 3. Es gibt also die Eigenzerlegung $A = U\Lambda U^T$ mit $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Aufgabe ist es, das Abbild des Einheitskreises $\mathcal{C} = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ visualisieren.

1. Zeichne den Einheitskreis C.
2. Was ist U^T für eine Transformation?
   Zeichne das Abbild des Einheitskreises nach Anwendung von U^T,

$$M_1 := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 | \mathbf{y} = U^T\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathcal{C}\}.$$

3. Was ist Λ für eine Transformation?
   Zeichne das Abbild des Einheitskreises nach Anwendung von ΛU^T,

$$M_2 := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 | \mathbf{y} = \Lambda U^T \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathcal{C}\}.$$

4. Was ist U für eine Transformation?
   Zeichne das Abbild des Einheitskreises nach Anwendung von $A = U\Lambda U^T$,

$$M_3 := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 | \mathbf{y} = U\Lambda U^T \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathcal{C}\}.$$

5. Zeichne die Eigenvektoren.

Aufgabe 6

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Zeige:

1. Gibt es eine reelle quadratische Matrix B, so dass $A = B^T B$, dann ist A positiv semi-definit.
   Hinweis: Sei $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Vektor. Zeige: $\mathbf{v}^T A \mathbf{v} \geq 0$.

2. Ist A postiv-semidefinit, dann gibt es eine reelle quadratische Matrix B mit $A = B^T B$.
   Hinweis: Sei $A = U\Lambda U^T$ die Eigenzerlegung von A. Konstruiere B aus U und Λ.

Aufgabe 7

Seien V, W zwei Vektorräume und sei $\Phi : V \mapsto W$ eine Abbildung, die Vektoren von V auf W abbildet. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : W \times W \mapsto \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf W.
Sei nun $S = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ eine Menge von Vektoren in V und sei $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die quadratische Matrix dessen Einträge $K_{ij} = \langle \Phi(x_i), \Phi(x_j) \rangle$ sind. (K wird auch Kern-Matrix genannt). Zeige: K ist postiv semi-definit.

Aufgabe 8

Gegeben sind Trainingsdaten Zeichne die (ungefähre) Richtung maximaler Varianz ein.