Mathematische Grundlagen
für Maschinelles Lernen

Wintersemester 2013

Fachgebiet Maschinelles Lernen
Institut für Softwaretechnik und theoretische Informatik
Fakultät IV, Technische Universität Berlin
Prof. Dr. Klaus-Robert Müller

Tag 2: Matrizen

Übungsaufgaben

Aufgabe 1

1. Eine Abbildung $f : V \mapsto W$ zwischen zwei reellen Vektorraeumen V und W ist linear, wenn

   □ $f(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda f(\mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{y})$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

   □ f eine Matrix ist

   □ Das Bild von f ein Untervektorraum von W ist.

2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$

   □ $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

3. Für welche der folgenden 3×3 Matrizen A gilt $AB = BA = B$ für alle $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

   □ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ □ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ □ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ 2×3- Matrizen. Dann ist

   □ $A + B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

   □ $A + B \in \mathbb{R}^{4\times 6}$

   □ $A + B \in \mathbb{R}^{4\times 9}$

5. Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt:

   □ A hat m Zeilen und n Spalten

   □ A hat n Zeilen und m Spalten

   □ Die Zeilen von A haben die Länge m und die Spalten von A haben die Länge n.

6. Welche der folgenden Eigenschaften hat die Matrixmultiplikation nicht:

   □ Assoziativität

   □ Kommutativität

   □ Distributivität

7. Für jede quadratische $n \times n$ Matrix A gilt

   □ $\operatorname{rang} A = n \Rightarrow A$ ist invertierbar, aber es gibt invertierbare A mit $\operatorname{rang} A \neq n$

   □ A ist invertierbar $\Rightarrow \operatorname{rang} A = n$, aber es gibt A mit $\operatorname{rang} A = n$, die nicht invertierbar sind.

   □ $\operatorname{rang} A = n \Leftrightarrow A$ ist invertierbar

8. Welche der folgenden Aussagen ist für alle $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ richtig:

   □ $\det(A + B) = \det A + \det B$

- $\square$ $\det \lambda A = \lambda \det A$
- $\square$ $\det(ABC) = \det A \det B \det C$

9. Welche der folgenden Aussagen ist für alle invertierbaren $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ richtig:
   - $\square$ $\det(A^{-1}BA) = \det A \det B$
   - $\square$ $\det(A^{-1}BA) = \det A$
   - $\square$ $\det(A^{-1}BA) = \det B$

10. $\det \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix} =$

    $\square$ 0 $\quad$ $\square$ λ $\quad$ $\square$ λ^3

Aufgabe 2

Beschreibe in Worten oder als Graphik, welche Abbildung durch die folgenden Matrizen beschrieben werden. Berechne ihre Determinanten.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

1. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine rechteckige Matrix. Welche Dimensionalität haben A^TA und AA^T?
2. Sind A^TA und AA^T symmetrisch?
3. Seien $B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrische Matrizen. Ist das Produkt BC symmetrisch?

Aufgabe 4

Sei $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix, d.h. $RR^T = R^TR = I$. Man zeige:

1. Die Multiplikation mit R ist invariant gegenüber der Bildung des Standardskalarprodukts zweier Vektoren, d.h. es gilt für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$

$$\langle R\mathbf{x}, R\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \,.$$

2. Orthogonale Matrizen haben Determinante 1 oder -1.

$$\det R = \pm 1.$$

   Hinweis: Zeige dazu $\det R = (\det R)^{-1}$.

Aufgabe 5

Wir haben bereits gestern gesehen, dass die orthogonale Projektion auf einen Unterraum eine lineare Abbildung darstellt. Ziel dieser Aufgabe ist es, die Matrixdarstellung für eine orthogonale Projektion herzuleiten.

Wir betrachten dazu den $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt. Sei $\mathcal{U}$ ein r-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ mit einer Basis $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \in \mathbb{R}^n$. Sei $U := (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r) \in \mathbb{R}^{n \times r}$ die Matrix, die die $\mathbf{u}_i$ als Spalten enthält. Im Gegensatz zu gestern müssen die $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \in \mathbb{R}^n$ zwar linear unabhängig, aber nicht orthonormal sein. Sei nun $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Vektor und $P\mathbf{v}$ seine orthogonale Projektion auf $\mathcal{U}$. Ziel dieser Aufgabe ist es, P gegeben U zu berechnen. Dazu stellen wir zuerst fest, dass $P\mathbf{v}$ folgende zwei Eigenschaften erfüllt:

- Da es sich um eine *orthogonale* Projektion handelt, steht $\mathbf{v} - P\mathbf{v}$ senkrecht auf jedem der $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$, d.h.:
$$U^T(P\mathbf{v} - \mathbf{v}) = 0 \tag{1}$$
- Da es sich um eine Projektion auf $\mathcal{U}$ handelt, ist $P\mathbf{v}$ in $\mathcal{U}$ enthalten. D.h. es gibt $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{R}$, so dass $P\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_r\mathbf{u}_r$. Definieren wir $\mathbf{c} := (c_1, \ldots, c_r)^T$, dann lässt sich dieser Sachverhalt wie folgt ausdrücken:
$$P\mathbf{v} = U\mathbf{c} \tag{2}$$

Löse nun folgende Aufgaben:

1. Betrachte die Graphik von gestern von dem Vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \end{pmatrix}$ und dessen orthogonale Projektion $P\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}$ auf den von dem Vektor $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ aufgespannten Raum. Veranschauliche Gleichung (1) und (2) an diesem Beispiel.
2. Folgere aus Gleichung (1) und (2), dass
$$\mathbf{c} = (U^T U)^{-1} U^T \mathbf{v}.$$
3. Zeige, dass daraus folgt:
$$P = U(U^T U)^{-1} U^T.$$
4. Welche Dimensionalität haben $U^T U$ und P?
5. Welchen Rang und welche Determinante hat P?
6. Angenommen, die $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \in \mathbb{R}^n$ bilden eine Orthonormalbasis von U. Vereinfacht das die Berechnung von P?
7. Konstruiere die 2×2 Matrix, die die orthogonale Projektion auf den von dem Vektor $(3, 4)^T$ aufgespannten Raum beschreibt.

Aufgabe 6

Zeige dass jede quadratische Matrix M als Summe einer symmetrischen Matrix M_s und einer antisymmetrischen Matrix M_a geschrieben werden kann, d.h. $M = M_s + M_a$ mit $M_s^T = M_s$ und $M_a^T = -M_a$

Hinweis: Konstruiere eine symmetrische und eine antisymmetrische Matrix ausgehend von M. Drücke dafür zuerst M^T in Abhängigkeit von M_s und M_a aus. Drücke dann M_s in Abhängikeit von M und M^T aus.

Aufgabe 7

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Man zeige:

$$\mathrm{Spur}(A \cdot B) = \mathrm{Spur}(B \cdot A)$$

Aufgabe 8

Gegeben sind Trainingsdaten. Skizziere eine mögliche Lösung für die Lineare Regression.