Mathematische Grundlagen
für Maschinelles Lernen

Wintersemester 2013

Fachgebiet Maschinelles Lernen
Institut für Softwaretechnik und
theoretische Informatik
Fakultät IV, Technische Universität Berlin
Prof. Dr. Klaus-Robert Müller

Tag 4: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Hausaufgaben

Abgabeschluss für diese Aufgaben ist Dienstag, 15. Oktober 2013 um 17:00 Uhr per e-mail an `nico.goernitz@tu-berlin.de`.

Aufgabe 1

1. In einer Schachtel befinden sich 3 Münzen: eine faire, eine gezinkte die mit Wahrscheinlichkeit 0.75 Kopf ergibt, und eine gefälscht, die auf beiden Seiten einen Kopf zeigt. Es wird zufällig eine der drei Münzen gewählt und geworfen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kopf geworfen wird?

   □ $\frac{5}{12}$ □ $\frac{4}{9}$ □ $\frac{3}{4}$

2. Fortsetzung: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gefälschte Münze geworfen wurde, falls ein Kopf geworfen wird?

   □ $\frac{1}{4}$ □ $\frac{4}{9}$ □ $\frac{3}{4}$

3. Die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen X und Y ist gegeben durch

   $$p(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y} & \text{wenn } x, y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

   □ X und Y sind unabhängig.
   □ X und Y sind unkorreliert, aber nicht unabhängig.
   □ X und Y sind weder unkorreliert noch unabhängig.

4. Eine Zufallsvariable X sei gleichverteilt auf dem Intervall 0 bis 3. Berechne $\mathbb{E}(X^2)$.

   □ $\frac{1}{3}$ □ 3 □ 9

5. Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}(X) = 1$ und $\mathrm{Var}(X) = 5$. Dann ist $\mathbb{E}((2 + X)^2)$ gleich

   □ 8 □ 13 □ 14

6. Sei X eine eindimensionale Zufallsvariable und $c \in \mathbb{R}$. Es gelte $\mathrm{Var}(X+c) = \mathrm{Var}(x)+\mathrm{Var}(c)$. Daraus folgt

   □ nichts, denn $\mathrm{Var}(X + c) = \mathrm{Var}(x) + \mathrm{Var}(c)$ gilt immer.
   □ $c = 0$.
   □ $\mathrm{Var}(X + c) = 0$.

7. Sei X eine reelwertige Zufallsvariable, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $Y = \alpha X$. Dann gilt

   □ $\mathrm{Corr}(X, Y) = \alpha$

- ☐ $\mathrm{Corr}(X,Y) = \mathrm{sign}(\alpha)$
- ☐ $\mathrm{Corr}(X,Y) = 1$

8. Sei $X \in \mathbb{R}^2$ eine zweidimensionale Zufallsvariable mit Kovarianzmatrix $\begin{pmatrix} 4 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$. Dann gilt

   - ☐ $\mathrm{Corr}(X_1, X_2) = 0.125$
   - ☐ $\mathrm{Corr}(X_1, X_2) = 0.25$
   - ☐ $\mathrm{Corr}(X_1, X_2) = 0.5$

9. Sei $X \in \mathbb{R}^2$ eine zweidimensionale Zufallsvariable mit Kovarianzmatrix Σ . Was gilt über die Eigenwerte von Σ?

   - ☐ Wenn Σ vollen Rang hat, sind die Eigenwerte alle > 0.
   - ☐ Die Eigenwerte sind alle > 0.
   - ☐ Man kann nicht ausschließen, dass es Eigenwerte < 0 gibt.

10. Der zentrale Grenzwertsatz besagt:

    - ☐ Ist eine normalverteilte Zufallsvariable die Summe von unabhängigen Zufallsvariablen, so sind diese ebenfalls normalverteilt.
    - ☐ Die Summe von unabhängigen normalverteilten Summanden ist wieder normalverteilt.
    - ☐ Die Summe einer großen Anzahl von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen ist annähernd normalverteilt.