Mathematische Grundlagen
für Maschinelles Lernen

Wintersemester 2013

Fachgebiet Maschinelles Lernen
Institut für Softwaretechnik und
theoretische Informatik
Fakultät IV, Technische Universität Berlin
Prof. Dr. Klaus-Robert Müller

Tag 2: Matrizen

Hausaufgaben

Abgabeschluss für diese Aufgaben ist morgen um 10:00 Uhr.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

1. Welche der folgenden Aussagen ist falsch: Ist $f : V \mapsto W$ eine lineare Abbildung, so gilt
   - ☐ $f(\lambda\mathbf{x}) = f(\lambda) + f(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$
   - ☐ $f(0) = 0$
   - ☐ $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in V$
2. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (x + y, y - x) \in \mathbb{R}^2$ ist durch die folgende Matrix gegeben:
   - ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
   - ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$
   - ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
3. Welches der folgenden Produkte von Matrizen ist Null:
   - ☐ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$
   - ☐ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
   - ☐ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$
4. Der Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ ist
   - ☐ 1
   - ☐ 3
   - ☐ 4
5. Für jede symmetrische, invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ gilt:
   - ☐ $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, A\mathbf{w}\rangle$
   - ☐ $\langle A\mathbf{v}, A\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$
   - ☐ $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \left\langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{w}\right\rangle$
6. Die Determinante ist eine Abbildung
   - ☐ $\mathbb{R}^{n\times n} \mapsto \mathbb{R}^{n-1}$, die das Volumen der Projektion auf $\mathbb{R}^{n-1}$ angibt.
   - ☐ $\mathbb{R}^{n\times n} \mapsto \mathbb{R}$, die linear in den Zeilen ist, für nicht invertierbare Matrizen verschwindet und für I den Wert 1 annimmt.
   - ☐ $\mathbb{R}^{n\times n} \mapsto \mathbb{R}^n$, die linear in den Zeilen ist, für nicht invertierbare Matrizen verschwindet und für I den Wert 1 annimmt.
7. Welche der folgenden Aussagen ist richtig: Für jede quadratische $n \times n$ Matrix A gilt
   - ☐ $\det A = 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A = 0$
   - ☐ $\det A = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang} A < n$
   - ☐ $\operatorname{rang} A = n \Rightarrow \det A = n$

8. Welche der folgenden Matrizen ist orthogonal:

   □ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

9. Es seien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine beliebige quadratische Matrix mit vollem Rang. Welche der folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ definiert ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$?

   □ $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

   □ $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle$ für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

   □ $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \left\langle A\mathbf{x}, A^T\mathbf{y} \right\rangle$ für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

10. Welche der folgenden Mengen von $n \times n$ Matrizen bildet zusammen mit der Matrixaddition und Skalarmultiplikation keinen reelen Vektorraum?

    □ Die symmetrischen Matrizen $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | A^T = A\}$

    □ Die orthogonalen Matrizen $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | AA^T = A^T A = I_n\}$

    □ Die oberen Dreiecksmatrizen $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | A_{ij} = 0 \text{ für } i > j\}$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Beschreibe in Worten, welche Abbildung durch die folgenden Matrizen beschrieben werden. Wie groß sind ihre Determinanten?

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $\mathcal{U}$ ein r-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ mit einer Basis $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \in \mathbb{R}^n$. Sei $U := (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r) \in \mathbb{R}^{n \times r}$ die Matrix, die die $\mathbf{u}_i$ als Spalten enthält. Die orthogonale Projektionsmatrix von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathcal{U}$ ist gegeben durch $P := U(U^T U)^{-1} U^T$.

1. Berechne das Produkt $P \cdot P$. Was bedeutet das Ergebnis intuitiv?

2. Konstruiere die 3×3 Matrix, die die orthogonale Projektion auf den von den Vektoren $(3, 4, 0)^T$ und $(1, 0, 0)^T$ aufgespannten Raum beschreibt.

Aufgabe 4

1. Zeige, dass der aus der Multiplikations eines Vektors $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ mit einer antisymmetrischen Matrix A resultierende Vektor orthogonal zu $\mathbf{v}$ ist, d.h.

$$A^T = -A \Rightarrow \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle = 0$$

2. Zeige dir Rückrichtung: Wenn eine Matrix $A \in R^{n \times n}$ jeden Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ auf einen Vektor orthogonal zu $\mathbf{v}$ abbildet, so ist A antisymmetrisch, d.h.

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle = 0 \Rightarrow A^T = -A$$