Mathematische Grundlagen
für Maschinelles Lernen

Wintersemester 2013

Fachgebiet Maschinelles Lernen
Institut für Softwaretechnik und
theoretische Informatik
Fakultät IV, Technische Universität Berlin
Prof. Dr. Klaus-Robert Müller

Tag 1: Euklidische Vektorräume

Hausaufgaben

Abgabeschluss für diese Hausaufgaben ist morgen um 10:00 Uhr.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

1. Sei V ein reeller Vektorraum. Welche der folgenden Aussage ist falsch?

   - ☐ Für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ gilt $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$
   - ☐ Für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ gilt $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
   - ☐ Für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ gilt $(\mathbf{uv})\mathbf{w} = \mathbf{u}(\mathbf{vw})$

2. Welcher der folgenden Mengen bildet zusammen mit der entsprechenden Addition und Skalarmultiplikation keinen reellen Vektorraum?

   - ☐ Die imaginären Zahlen $\{iy \in \mathbb{C} | y \in \mathbb{R}\}$
   - ☐ Die Menge der reellwertigen, positiven Funktionen $\{f : \mathbb{R}^n \mapsto [0, +\infty]\}$
   - ☐ Die Menge aller Polynome vom Grad $\leq n$ $\{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} | f(x) = \sum_{i=0}^{p} a_p x^p, a_p \in \mathbb{R}\}$

3. Sei V ein reeller Vektorraum. Welche Aussage ist richtig:

   - ☐ $\{\mathbf{v} + \mathbf{w} | \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V\} = V$
   - ☐ $\{\mathbf{v} + \mathbf{w} | \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V\} = V \times V$
   - ☐ $\{\lambda \mathbf{v} | \mathbf{v} \in V, \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times V$

4. Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ist ein Untervektorraum?

   - ☐ $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | x_1 = \ldots = x_n\}$
   - ☐ $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | x_1^2 = x_2^2\}$
   - ☐ $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | x_1 = 1\}$

5. Welche der folgenden Aussagen bedeutet die lineare Unabhängigkeit von Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$?

   - ☐ $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n = 0$ nur wenn $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$
   - ☐ Wenn $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ dann $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n = 0$
   - ☐ $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n = 0$ für alle $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$

6. Welche der folgenden Vektoren bilden eine Basis des Vektorraums der Polynome vom Grad 2?

   - ☐ $f_1(x) = x^2 + x - 2,\ f_2(x) = 2x^2 + 2x - 4,\ f_3(x) = 3x + 2$
   - ☐ $f_1(x) = 5x^2 - 2,\ f_2(x) = 3x,\ f_3(x) = 1$
   - ☐ $f_1(x) = x^2 + 3x + 1,\ f_2(x) = x^2 - 1,\ f_3(x) = x + 1,\ f_4(x) = x - 1$

7. Wieviele Dimensionen hat der Vektorraum $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x_1 + 2x_2 = 0, x_1 + x_3 = 0\}$?

   □ 1 □ 2 □ 3

8. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

   □ Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, so ist $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

   □ Definiert man $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, so ist dadurch ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ erklärt.

   □ Dafür, dass eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert, ist $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ eine notwendige Bedingung. (Das Kronecker Symbol δ_{ij} ist definiert als $\delta_{ii} := 1$ und $\delta_{ij} := 0$ für $i \neq j$.)

9. Welche der folgenden Abbildungen definiert kein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $L_2(\mathbb{R})$ der quadratisch integrierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$?

   □ $\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx$ für alle $f, g \in L_2(\mathbb{R})$

   □ $\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) f(x)g(x)dx$ für alle $f, g \in L_2(\mathbb{R})$

   □ $\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) + g(x)dx$ für alle $f, g \in L_2(\mathbb{R})$

10. Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt. Welches der folgenden Vektoren bilden eine orthonomale Basis?

   □ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und seien $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ paarweise orthogonale Vektoren. Beweise das generalisierte Phytagorastheorem:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{v}_i\|^2$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt. Sei U ein r -dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ mit einer Orthonormalbasis $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \in \mathbb{R}^n$. Die orthogonale Projektion eines Vektors $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ auf U ist gegeben durch

$$p(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{r} \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{r} (\mathbf{v}^T \mathbf{u}_i) \mathbf{u}_i.$$

Zeige:

$$p(\mathbf{v}) = \left(\sum_{i=1}^{r} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \right) \mathbf{v}.$$