

Tag 4: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Übungsaufgaben

Aufgabe 1

1. In einer Schachtel befinden sich 3 Münzen: eine faire, eine gezinkte die mit Wahrscheinlichkeit 0.75 Kopf ergibt, und eine gefälscht, die auf beiden Seiten einen Kopf zeigt. Es wird zufällig eine der drei Münzen gewählt und geworfen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kopf geworfen wird?

☐ $\frac{5}{12}$

☐ $\frac{4}{9}$

☐ $\frac{3}{4}$

2. Sei X eine reellwertig Zufallsvariable, und p ihre Dichtefunktion. Es gilt für alle $c \in \mathbb{R}$:

☐ $P(X \leq c) = p(c)$

☐ $P(X \leq c) = \int_{-\infty}^c p(x)dx$

☐ $P(X \leq c) = \int_{-\infty}^c xp(x)dx$

3. Die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen X und Y ist gegeben durch

$$p(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y} & \text{wenn } x, y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

☐ X und Y sind unabhängig.

☐ X und Y sind unkorreliert, aber nicht unabhängig.

☐ X und Y sind weder unkorreliert noch unabhängig.

4. Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte p und sei $c > 0$ eine Konstante. Die Aussage "Die Zufallsvariable cX besitzt die Dichtefunktion cp " ist

☐ richtig

☐ falsch

☐ nur richtig wenn $\text{Var}(X) = 1/c$ gilt.

5. Sei X eine reellwertig Zufallsvariable, und p ihre Dichtefunktion. Der Erwartungswert von X^2 , $\mathbb{E}(X^2)$ ist definiert als

☐

$$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x^2)dx$$

☐

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2p(x^2)dx$$

☐

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2p(x)dx$$

6. Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}(X) = 1$ und $\text{Var}(X) = 5$. Dann ist $\mathbb{E}((2 + X)^2)$ gleich
- ☐ 8 ☐ 12 ☐ 14
7. Sei X eine eindimensionale Zufallsvariable und $c \in \mathbb{R}$. Es gelte $\text{Var}(X + c) = \text{Var}(x) + \text{Var}(c)$. Daraus folgt
- ☐ nichts, denn $\text{Var}(X + c) = \text{Var}(x) + \text{Var}(c)$ gilt immer.
☐ $c = 0$.
☐ $\text{Var}(X + c) = 0$.
8. Sei $X \in \mathbb{R}^2$ eine zweidimensionale Zufallsvariable mit Kovarianzmatrix $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Dann gilt
- ☐ $\text{Corr}(X_1, X_2) = -0,25$
☐ $\text{Corr}(X_1, X_2) = -0.5$
☐ $\text{Corr}(X_1, X_2) = -1$
9. Sei X eine reelwertige Zufallsvariable, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $Y = \alpha X$. Dann gilt
- ☐ $\text{Corr}(X, Y) = \alpha$
☐ $\text{Corr}(X, Y) = \text{sign}(\alpha)$
☐ $\text{Corr}(X, Y) = 1$
10. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?
- ☐ Die Verteilung einer normalverteilte Zufallsvariable ist eindeutig durch ihren Mittelwert und ihre Kovarianzmatrix bestimmt.
☐ Normalverteilte Zufallsvariablen sind unkorreliert.
☐ Die Summe zweier normalverteilter Zufallsvariablen ist wieder normalverteilt.

Aufgabe 2

Ein bestimmtes Krebsdiagnoseverfahren liefert in 99 Prozent aller Fälle das richtige Ergebnisse. Tatsächlich sind 1 Prozent der Bevölkerung krebskrank. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine getestete Person an Krebs erkrankt ist, unter der Bedingung, dass dies der Test ergab?

Aufgabe 3

Es seien X, Y zwei Zufallsvariablen mit den möglichen Werten 0,1 und 2 sowie der gemeinsamen Verteilung gemäß der folgenden Tabelle

$P(X, Y)$	Y=0	Y=1	Y=2
X=0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0
X=1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
X=2	0	0	$\frac{1}{5}$

1. Berechne die Randverteilungen von X und Y , $P(X)$ und $P(Y)$.
2. Berechne die Posteriorverteilung von X , $P(X|Y)$.
3. Sind X und Y unabhängig?
4. Berechne die Erwartungswerte von X und Y .

Aufgabe 4

Die Zufallsvariablen X sei gleichverteilt auf dem Intervall von -1 bis 1 . Die Dichte ist definiert durch

$$p(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{wenn } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1. Verifiziere, dass $p(x)$ eine Dichte ist.
2. Berechne die Verteilungsfunktion F von X .
3. Zeichne die Dichte von X und die Verteilungsfunktion von X in eine Graphik ein.
4. Berechne den Erwartungswert von X .
5. Berechne die Varianz und die Standardabweichung von X .

Aufgabe 5

Seien X und Y zwei eindimensionale Zufallsvariablen und $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Man zeige:

1. $\text{Cov}(aX + b, cY + d) = ac \text{Cov}(X, Y)$.
2. $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \cdot \text{Cov}(X, Y)$.
Hinweis: Wegen 1. kann man hier o.B.d.A $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$ annehmen.

Aufgabe 6

Sei $X \in \mathbb{R}^n$ eine mehrdimensionale Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mathbb{E}(X) = \mathbf{0}$ und der Kovarianzmatrix $\mathbb{E}(XX^T) = I$. (Dies ist z.B. für Daten die auf dem Rand des Einheitskreises gleichverteilt sind der Fall, oder für normalverteilte Daten mit Kovarianzmatrix I .)

Sei $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine beliebige orthogonale Matrix und $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix.

1. Berechne die Kovarianzmatrix von $U^T X$.
2. Berechne die Kovarianzmatrix von $\Lambda U^T X$.
3. Berechne die Kovarianzmatrix von $U \Lambda U^T X$.
4. Sei $Y := U \Lambda U^T X$ eine Zufallsvariable. Gebe eine Matrix A an, so dass AY die Kovarianzmatrix I hat.
5. Sei $Z \in \mathbb{R}^n$ eine mehrdimensionale Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mathbb{E}(Z) = \mathbf{0}$ und der Kovarianzmatrix $\Sigma := \mathbb{E}(ZZ^T)$. Sei $\Sigma = V D V^T$ eine Eigenzerlegung von Σ (d.h. D ist eine Diagonalmatrix und V ist eine orthogonale Matrix). Gebe eine Matrix B an, so dass BZ die Kovarianzmatrix I hat.