

Tag 1: Euklidische Vektorräume

Übungsaufgaben

Aufgabe 1

1. Das kartesische Produkt $A_1 \times \cdots \times A_n$ von Mengen $A_1, \dots, A_n$ ist definiert als
 - ☐ $A_1 \times \cdots \times A_n := A_1 \setminus (A_2 \cup \dots \cup A_n)$
 - ☐ $A_1 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, \dots, a_n) | a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$
 - ☐ $A_1 \times \cdots \times A_n := \{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n | a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$
2. Welcher der folgenden Mengen bildet zusammen mit der entsprechenden Addition und Skalarmultiplikation keinen reellen Vektorraum?
 - ☐ Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$
 - ☐ Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$
 - ☐ Die Menge der reellwertigen, stetigen Funktionen $\{f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} | f \text{ stetig}\}$
3. Eine skalare Multiplikation ist in einem reellen Vektorraum V gegeben durch eine Abbildung
 - ☐ $V \times V \mapsto \mathbb{R}$
 - ☐ $\mathbb{R} \times V \mapsto V$
 - ☐ $\mathbb{R} \times V \mapsto \mathbb{R}$
4. Wieviele Unterräume hat $\mathbb{R}^2$?
 - ☐ zwei: $\{0\}$ und $\mathbb{R}^2$
 - ☐ vier: $\{0\}$, $\mathbb{R} \times \{0\}$, $\{0\} \times \mathbb{R}$ (die Achsen), $\mathbb{R}^2$
 - ☐ unendlich viele
5. Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ ist kein Untervektorraum?
 - ☐ $\{0\}$
 - ☐ $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | x_1 = 2x_2\}$
 - ☐ $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | x_1 = x_2 + 1\}$
6. Für welche der folgende Objekte hat die Aussage einen Sinn, sie seien "linear unabhängig"?
 - ☐ $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ Elemente eines Vektorraums
 - ☐ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ reelle Zahlen
 - ☐ Die Linearkombination $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n$
7. Welche der folgenden Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$?
 - ☐ $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
 - ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 - ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

8. Ein Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum V ist eine Abbildung

$$\square \mathbb{R} \times V \mapsto V$$

$$\square V \times V \mapsto \mathbb{R}$$

$$\square V \mapsto V \times V$$

9. Was ist das Skalarprodukt der folgenden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$?

$$\square 3$$

$$\square 5$$

$$\square 7$$

10. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

☐ In jedem euklidischen Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ erfüllt $\sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ die Eigenschaften einer Norm.

☐ In jedem euklidischen Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \geq 0$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

☐ Sei M eine Teilmenge eines euklidischen Vektorraumes $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Dann ist

$$\{\mathbf{v} \in V \mid \forall \mathbf{u} \in M : \mathbf{v} \perp \mathbf{u}\}$$

ein Untervektorraum von V .

Aufgabe 2

Zeige: Ist $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ eine Orthonormalbasis eines euklidischen Vektorraums $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, so gilt für jedes $\mathbf{x} \in V$:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i$$

Hinweis: Auf jeden Fall ist $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n$ darstellbar. Zeige nun, dass $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle = \lambda_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Aufgabe 3

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und U ein r -dimensionaler Untervektorraum mit einer Orthonormalbasis $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$. Die orthogonale Projektion eines Vektors $\mathbf{v} \in V$ auf U ist gegeben durch

$$p(\mathbf{v}) := \sum_{i=1}^r \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i$$

1. Berechne die orthogonale Projektion des Vektors $(25, 0)^T$ auf den von dem Vektor $(3, 4)^T$ aufgespannten Raum und zeichne die Vektoren in eine Graphik.

2. Sei $\mathbf{x} \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige:

$$p(\lambda \mathbf{x}) = \lambda p(\mathbf{x}).$$

3. Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Zeige:

$$p(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = p(\mathbf{x}) + p(\mathbf{y}).$$

Aufgabe 4

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^n$.

1. Zeige, dass die Abbildung

$$k(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto (\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle)^2 \in \mathbb{R}$$

kein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert.

2. Wir betrachten die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ mit

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto (x_1^2, x_2^2, \sqrt{2}x_1x_2) \in \mathbb{R}^3.$$

Zeige:

$$\langle \Phi(\mathbf{x}), \Phi(\mathbf{y}) \rangle = k(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Aufgabe 5

Die 1-Norm wird oft benutzt, um bei Optimierungen auf dünn-besetzte Lösungen (Einträge mit vielen Nullen) zu kommen. In dieser Aufgabe soll das veranschaulicht werden.

Gesucht sei der Vektor $\mathbf{w} = (x, y)^T$, der das Optimierungsproblem

$$\max_{\mathbf{w}} f(\mathbf{w}) \quad s.t. \quad \|\mathbf{w}\| = 1$$

löst. Wir betrachten $f(x, y) = 0.5 \cdot x + y$ und wollen die Lösung des Optimierungsproblems für die 1-Norm und die 2-Norm vergleichen.

1. Zeichne in der x-y-Ebene alle Punkte, für die die 2-Norm 1 ist.

$$C_2 := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)^T\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} = 1\}.$$

2. Zeichne alle Punkte, für die die 1-Norm 1 ist.

$$C_1 := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)^T\|_1 = |x| + |y| = 1\}.$$

3. Zeichne Höhenlinien $c = f(x, y)$ für $c = 0.5$, $c = 1$ und $c = 1.1$.

4. Wo liegt, rein graphisch betrachtet, die Lösung des Optimierungsproblems für die 1-Norm?
Wo für die 2-Norm?