

# Lineare Abbildungen, Matrizen, Determinante

Irene Winkler

Arbeitsgruppe Maschinelles Lernen

05. Oktober 2011

Matrizen als Lineare Abbildungen

Matrixrechnung

Determinante

# Lineare Abbildungen

**Definition.** Seien  $V$  und  $W$  reelle Vektorräume. Eine Abbildung  $f : V \mapsto W$  heisst *linear* wenn

1.  $f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w})$  und
2.  $f(\lambda \mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v})$

für alle  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$

# Lineare Abbildungen

Seien  $V$  und  $W$  reelle Vektorräume,  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  eine Basis von  $V$  und  $f : V \mapsto W$  eine linear Abbildung.

Linearität  $\Rightarrow$  für jedes  $\mathbf{v} \in V$  gilt:

$$f(\mathbf{v}) = f(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n) = \lambda_1 f(\mathbf{v}_1) + \dots + \lambda_n f(\mathbf{v}_n)$$

$\Rightarrow$  Es genügt die Bilder der Basisvektoren zu kennen, um die ganze Funktion zu charakterisieren!

$\Rightarrow$  repräsentierbar als Matrix, in der die Koordinaten von  $\mathbf{v}$  auf Koordinaten von  $f(\mathbf{v})$  abgebildet werden.

# Matrizen

Sei  $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$  eine linear Abbildung. Wir wollen sie charakterisieren durch  $g(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$  für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  und  $A$  eine  $m \times n$  Matrix.

$$g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Wie muss  $A$  aussehen?

Es genügt, die Bilder der Basisvektoren  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  zu kennen.

Die Spalten der Matrix  $A$  sind die Bilder der Einheitsvektoren!

# Beispiele

- ▶  $n \times n$  Identitätsmatrix  $I$
- ▶  $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  Drehung um  $90^\circ$
- ▶  $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  Spiegelung an der x-Achse
- ▶  $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  Projektion auf die Gerade durch  $(0,0)$  und  $(1,1)$

# Rang

**Definition:** Der Rang einer Matrix ist die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten (äquivalent: Zeilen).

Der Rang ist die Dimensionalität des Bildes von der durch  $A$  beschriebenen Abbildung.

# Matrixrechnung

- ▶ Addition
- ▶ Skalarmultiplikation
- ▶ Multiplikation

# Inverse Matrix

**Definition:** Eine quadratische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist *invertierbar* (*regulär, nichtsingulär*), wenn eine weitere Matrix  $A^{-1}$  existiert, sodass

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Es gilt:

- ▶  $A$  ist genau dann invertierbar, wenn  $\text{rang}(A) = n$
- ▶  $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- ▶  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- ▶  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

## Weiteres

- ▶ Spur einer quadratischen Matrix = Summe der Hauptdiagonalelemente.

Für  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  und  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  gilt

$$\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$$

.

- ▶ Sind  $A^T, B^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$  die transponierten Matrizen zu  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  dann

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T,$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

# Wichtige Matrizen

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine quadratische, reelle Matrix.

- ▶ A ist *orthogonal* wenn  $AA^T = A^T A = I_n$ .  
Orthogonale Matrizen stellen Spiegelungen und Drehungen im Raum dar.
- ▶ A ist *symmetrisch* wenn  $A = A^T$
- ▶ A ist *antisymmetrisch* wenn  $A = -A^T$
- ▶ A ist *diagonal* wenn alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonale 0 sind

# Determinante

Die Determinante einer quadratischen Matrix ist eine Zahl. Was bedeutet sie anschaulich?

- ▶ Absolutbetrag: das Volumen des Parallelotops das durch die Zeilen- oder Spaltenvektoren aufgespannt wird
- ▶ Vorzeichen: Orientierung des Parallelotops

# Determinante

**Satz und Definition:** Es gibt genau eine Abbildung

$\det : \mathbb{R}^{n \times n} \ni A \mapsto \det A \in \mathbb{R}$  mit

1.  $\det$  ist linear in jeder Zeile
2. Ist der (Zeilen-) rang kleiner als  $n$ , so ist  $\det A = 0$
3.  $\det I_n = 1$

Diese Abbildung heisst *Determinante*.

## Determinante - Regeln

Seien  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  zwei quadratische Matrizen und  $\lambda \in \mathbb{R}$

- ▶ Ist  $A$  eine Dreiecksmatrix, dann ist die Determinante das Produkt der Hauptdiagonalelemente von  $A$
- ▶  $A$  ist genau dann invertierbar, wenn  $\det A \neq 0$
- ▶  $\det AB = \det A \det B$
- ▶  $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$
- ▶  $\det A = \det A^T$
- ▶  $\det \lambda A = \lambda^n \det A$
- ▶  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$