Mathematische Grundlagen
für Maschinelles Lernen

Wintersemester 2011/2012

Fachgebiet Maschinelles Lernen
Institut für Softwaretechnik und
theoretische Informatik
Fakultät IV, Technische Universität Berlin
Prof. Dr. Klaus-Robert Müller

Tag 4: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Übungsaufgaben

Aufgabe 1

1. Sei X eine reele Zufallsvariable und seien $[a_1 a_2], [b_1, b_2] \subset \mathbb{R}$ zwei disjunkte Intervalle von $\mathbb{R}$, $[a_1 a_2] \cap [b_1, b_2] = \emptyset$. Es sei $P(X \in [a_1 a_2]) = 0.3$ und $P(X \in [b_1, b_2]) = 0.4$. Dann ist $P(X \in [a_1 a_2] \cup [b_1, b_2])$ gleich

   □ 0.35 □ 0.4 □ 0.7

2. Eine Münze, deren Wurf mit Wahrscheinlichkeit p Kopf ("K") und mit Wahrscheinlichkeit $(1-p)$ Zahl ("Z") ergibt, wird 5 Mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten 5 Würfe "Z, Z, K, K, Z" ergeben?

   □ $3(1-p)+2p$ □ $(1-p)\binom{3}{5}$ □ $(1-p)^3 p^2$

3. Seien X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen, die die Werte $x_1, \ldots, x_n$ bzw. $y_1, \ldots, y_m$ annehmen können. Welche Aussage ist falsch?

   □ Sind X und Y unabhängig, so gilt für alle $0 \leq i \leq m$, $0 \leq i \leq n$:
   $$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) + P(Y = y_j)$$
   □ X und Y sind genau dann unabhängig, wenn für alle $0 \leq i \leq m$, $0 \leq i \leq n$:
   $$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j).$$
   □ Sind X und Y unabhängig, so gilt $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

4. Sei X eine reellwertig Zufallsvariable, und p ihre Dichtefunktion. Es gilt für alle $c \in \mathbb{R}$:

   □ $P(X \leq c) = p(x)$
   □ $P(X \leq c) = \int_{-\infty}^{c} p(x)dx$
   □ $P(X \leq c) = \int_{-\infty}^{c} xp(x)dx$

5. Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte p und sei $c > 0$ eine Konstante. Die Aussage "Die Zufallsvariable cX besitzt die Dichtefunktion cp" ist

   □ richtig
   □ falsch
   □ nur richtig wenn $\text{Var}(X) = 1/c$ gilt.

6. Eines der folgenden fünf Wörter wird zufällig gezogen:
   DER ZUFALL REGIERT DIE WELT
   Wie groß ist der Erwartungswert der Anzahl der Buchstaben E des gezogenen Wortes?

   □ 0.5 □ 1 □ 5

7. Sei X eine reellwertig Zufallsvariable, und p ihre Dichtefunktion. Der Erwartungswert von X^2, $\mathbb{E}(X^2)$ ist definiert als

   □ $$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x^2)dx$$ □ $$\int_{-\infty}^{\infty} x^2p(x^2)dx$$ □ $$\int_{-\infty}^{\infty} x^2p(x)dx$$

8. Seien X und Y zwei Zufallsvariablen. Die Korrelation von X und Y ist definiert als
   - □ $\mathrm{Corr}(X,Y) := \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}$
   - □ $\mathrm{Corr}(X,Y) := \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}$
   - □ $\mathrm{Corr}(X,Y) := \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}+\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}$

9. Sei $X \in \mathbb{R}^2$ eine zweidimensionale Zufallsvariable mit Kovarianzmatrix $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Dann gilt
   - □ $\mathrm{Corr}(X_1, X_2) = -0,25$
   - □ $\mathrm{Corr}(X_1, X_2) = -0.5$
   - □ $\mathrm{Corr}(X_1, X_2) = -1$

10. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?
    - □ Die Verteilung einer normalverteilte Zufallsvariable ist eindeutig durch ihren Mittelwert und ihre Kovarianzmatrix bestimmt.
    - □ Normalverteilte Zufallsvariablen sind unkorreliert.
    - □ Die Summe zweier normalverteilter Zufallsvariablen ist wieder normalverteilt.

Aufgabe 2

Ein bestimmtes Krebsdiagnoseverfahren liefert in 98 Prozent aller Fälle das richtige Ergebnisse. Tatsächlich sind 0.1 Prozent der Bevölkerung krebskrank. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine getestete Person an Krebs erkrankt ist, unter der Bedingung, dass dies der Test ergab?

Aufgabe 3

Es seien X, Y zwei Zufallsvariablen mit den möglichen Werten 0,1 und 2 sowei der gemeinsamen Verteilung gemäß der folgenden Tabelle

$P(X,Y)$	Y=0	Y=1	Y=2
X=0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0
X=1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
X=2	0	0	$\frac{1}{5}$

1. Berechne die Randverteilungen von X und Y, $P(X)$ und $P(Y)$.
2. Berechne die Posteriorverteilung von X, $P(X|Y)$.
3. Sind X und Y unabhängig?
4. Berechne die Erwartungswerte und Varianzen von X und Y und überprüfe, dass X und Y die gleiche Varianz besitzen. Berechne die Kovarianz und die Korrelation von X und Y.

Aufgabe 4

Die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen X und Y ist gegeben durch

$$p(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{wenn } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1. Was bedeutet diese Dichte intuitiv: Welche Werte von X und Y sind besonders wahrscheinlich?
2. Berechne die Dichten p_X und p_Y von X und Y.
3. Sind X und Y unabhängig?
4. Berechne die Verteilungsfunktion F_X von X.
5. Zeichne die Dichte von X und die Verteilungsfunktion von X in eine Graphik ein.

Aufgabe 5

Seien X und Y zwei eindimensionale Zufallsvariablen und $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Man zeige:

1. $\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = ac \, \mathrm{Cov}(X, Y)$.
2. $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2 \cdot \mathrm{Cov}(X, Y)$.
   Hinweis: Wegen 1. kann man hier o.B.d.A $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$ *annehmen.*

Aufgabe 6

Sei $X \in \mathbb{R}^n$ eine mehrdimensionale Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mathbb{E}(X) = 0$ und der Kovarianzmatrix $\mathbb{E}(XX^T) = I$. (Dies ist z.B. für Daten die auf dem Rand des Einheitskreises gleichverteilt sind der Fall, oder für normalverteilte Daten mit Kovarianzmatrix I.)
Sei $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine beliebige orthogonale Matrix und $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix.

1. Berechne die Kovarianzmatrix von $V^T X$.
2. Berechne die Kovarianzmatrix von $DV^T X$.
3. Berechne die Kovarianzmatrix von $VDV^T X$.
4. Sei $Y := VDV^T X$ eine Zufallsvariable. Gebe eine Matrix A an, so dass AY die Kovarianzmatrix I hat.
5. Sei $Z \in \mathbb{R}^n$ eine mehrdimensionale Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mathbb{E}(Z) = 0$ und der Kovarianzmatrix $\Sigma := \mathbb{E}(ZZ^T)$. Sei $\Sigma = U \Lambda U^T$ eine Eigenzerlegung von Σ (d.h. Λ ist eine Diagonalmatrix und U ist eine orthogonale Matrix). Gebe eine Matrix B an, so dass BZ die Kovarianzmatrix I hat.