

## Tag 3: Eigenwerte und Eigenvektoren

### Übungsaufgaben

#### Aufgabe 1

1. Damit von den Eigenwerten einer reellen Matrix  $A$  überhaupt gesprochen werden kann, muss  $A$ 
  - symmetrisch sein.
  - invertierbar sein.
  - quadratisch sein.
2. Welcher der folgenden Vektoren ist Eigenvektor von  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ?
  - $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$
3. Das charakteristische Polynom von  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$  ist gegeben durch?
  - $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 10$
  - $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 10$
  - $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$
4. Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  eine reelle Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Dann gilt
  - Über die Dimension des von den Eigenvektoren zum Eigenwert  $\lambda$  aufgespannte Raum kann nichts gesagt werden, außer dass sie  $\geq 1$  und  $\leq n$  ist.
  - Es gibt höchstens  $n$  Eigenvektoren mit Norm 1 zum Eigenwert  $\lambda$ .
  - Es gibt unter Umständen gar keine Eigenvektoren zum Eigenwert  $\lambda$ .
5. Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine quadratische Matrix dessen charakteristischen Polynoms  $n$  reelle Nullstellen hat. Dann gilt
  - $A$  ist diagonalisierbar.
  - $A$  ist genau dann diagonalisierbar wenn die Nullstellen paarweise voneinander verschieden sind.
  - Wenn die Nullstellen paarweise voneinander verschieden sind ist  $A$  diagonalisierbar. Die Rückrichtung gilt aber nicht.
6. Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine quadratische Matrix dessen charakteristischen Polynoms  $n$  reelle Nullstellen hat. Dann gilt
  - $A$  ist symmetrisch.
  - Wenn  $A$  außerdem symmetrisch ist, so stehen die Eigenvektoren von voneinander verschiedenen Eigenwerten senkrecht aufeinander.
  - Wenn  $A$  außerdem symmetrisch ist, so sind die Nullstellen paarweise voneinander verschieden sind.

7. Sei  $A$  eine invertierbare Matrix und  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A$ . Dann ist
- $\lambda$  ein Eigenwert von  $A^{-1}$
  - $-\lambda$  ein Eigenwert von  $A^{-1}$
  - $1/\lambda$  ein Eigenwert von  $A^{-1}$
8. Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine quadratische Matrix und  $p \in \mathbb{N}$ . Dann haben  $A$  und  $A^p$
- Die gleichen Eigenvektoren und Eigenwerte
  - Die gleichen Eigenwerte, aber nicht notwendigerweise gleiche Eigenvektoren
  - Die gleichen Eigenvektoren, aber nicht notwendigerweise gleiche Eigenwerte
9. Für jede symmetrische, invertierbare Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und Vektoren  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  gilt:
- $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, A\mathbf{w} \rangle$
  - $\langle A\mathbf{v}, A\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
  - $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{w} \rangle$
10. Welche der folgenden Matrizen ist positiv-definit?
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$                         $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$                         $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

## Aufgabe 2

Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ . Berechne die Determinante und die Spur der Matrix.

## Aufgabe 3

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine quadratische Matrix und  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  Eigenvektoren von  $A$  zu den Eigenwerten  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , mit  $\lambda \neq \mu$ . Zeige:  $v$  und  $w$  sind linear unabhängig.

## Aufgabe 4

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische Matrix und  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  Eigenvektoren von  $A$  zu den Eigenwerten  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , mit  $\lambda \neq \mu$ . Zeige:  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{w}$  sind orthogonal, d.h.  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ .  
*Hinweis:*  $\lambda \langle v, w \rangle = \dots$

## Aufgabe 5

Ziel dieser Aufgabe ist es, die lineare Abbildung, die durch  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  beschrieben wird,  $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ , zu visualisieren. Zwei orthogonale Eigenvektoren von  $A$  sind  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , die dazugehörigen Eigenwerte 1 und 3. Es gibt also die Eigenzerlegung  $A = U\Lambda U^T$  mit  $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  und  $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

Aufgabe ist es, das Abbild des Einheitskreises  $\mathcal{C} = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$  visualisieren.

1. Zeichne den Einheitskreis  $\mathcal{C}$ .
2. Was ist  $U^T$  für eine Transformation?  
 Zeichne das Abbild des Einheitskreises nach Anwendung von  $U^T$ ,

$$M_1 := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{y} = U^T \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathcal{C}\}.$$

3. Was ist  $\Lambda$  für eine Transformation?

Zeichne das Abbild des Einheitskreises nach Anwendung von  $\Lambda U^T$ ,

$$M_2 := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{y} = \Lambda U^T \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathcal{C}\}.$$

4. Was ist  $U$  für eine Transformation?

Zeichne das Abbild des Einheitskreises nach Anwendung von  $A = U\Lambda U^T$ ,

$$M_3 := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{y} = U\Lambda U^T \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathcal{C}\}.$$

5. Zeichne die Richtungen der Eigenvektoren

## Aufgabe 6

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische Matrix. Zeige:

1. Gibt es eine reelle quadratische Matrix  $B$ , so dass  $A = B^T B$ , dann ist  $A$  positiv semi-definit.
2. Ist  $A$  positiv-semidefinit, dann gibt es eine reelle quadratische Matrix  $B$  mit  $A = B^T B$ .

*Hinweis:* Konstruiere  $B$  aus der Eigenzerlegung von  $A$ .