Mathematische Grundlagen
für Maschinelles Lernen

Wintersemester 2011/2012

Fachgebiet Maschinelles Lernen
Institut für Softwaretechnik und
theoretische Informatik
Fakultät IV, Technische Universität Berlin
Prof. Dr. Klaus-Robert Müller

Tag 3: Eigenwerte und Eigenvektoren

Hausaufgaben

Abgabeschluss für diese Aufgaben ist morgen um 10:00 Uhr.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

1. Wenn $A(-\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ dann ist

   □ $\mathbf{v}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ

   □ $-\mathbf{v}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ

   □ $-\mathbf{v}$ Eigenvektor zum Eigenwert $-\lambda$

2. Sei A eine $n \times n$ quadratische Matrix mit r paarweise voneinander verschiedenen Eigenwerten. Dann ist die Dimension des von allen Eigenvektoren von A aufgespannten Raumes

   □ gleich r □ $\leq r$ □ $\geq r$

3. Sei A eine quadratische Matrix und λ ein Eigenwert von A. Dann ist für jedes $p \in \mathbb{N}$

   □ λ ein Eigenwert von A^p

   □ λ^p ein Eigenwert von A^p

   □ λ^{-p} ein Eigenwert von A^p

4. Sei A eine quadratische Matrix und λ ein Eigenwert von A. Dann ist für jedes $\pi \in \mathbb{R}$

   □ λ ein Eigenwert von $A - \pi I$

   □ $\lambda - \pi$ ein Eigenwert von $A - \pi I$

   □ λ/π ein Eigenwert von $A - \pi I$

5. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und es gelte $A = ZBZ^{-1}$ für eine invertierbare Matrix $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann haben A und B

   □ Die gleichen Eigenvektoren und Eigenwerte

   □ Die gleichen Eigenwerte, aber nicht notwendigerweise gleiche Eigenvektoren

   □ Die gleichen Eigenvektoren, aber nicht notwendigerweise gleiche Eigenwerte

6. Sei A eine symmetrische $n \times n$ Matrix und seien $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ linear unabhängig Eigenvektoren von A mit $\|\mathbf{v}_i\| = 1$ für $i = 1, \ldots n$. Sei U die Matrix, deren Spalten $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ enthalten. Ist dann $U^T U = I$?

   □ Ja, denn Eigenvektoren symmetrischer Matrizen stehen senkrecht aufeinander.

   □ Nein, denn Vektorräume von Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert können mehrdimensional sein.

   □ Ja, denn linear unabhängige Eigenvektoren stehen senkrecht aufeinander.

7. Eine symmetrische $n \times n$ Matrix A habe nur einen Eigenwert λ. Dann

   - ☐ ist $n = 1$
   - ☐ ist A eine Diagonalmatrix.
   - ☐ ist A nicht invertierbar.

8. Die Eigenwerte einer symmetrischen $n \times n$ Matrix A seien alle 0. Dann

   - ☐ ist $n = 1$.
   - ☐ ist A die Nullmatrix.
   - ☐ ist A eine Diagonalmatrix.

9. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und es gelte $A = ZBZ^{-1}$ für eine invertierbare Matrix $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

   - ☐ $\det A = \det B$
   - ☐ $\operatorname{Spur} A = \operatorname{Spur} B$
   - ☐ B symmetrisch $\Leftrightarrow$ A symmetrisch

10. Sei A eine positiv-definite Matrix. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

    - ☐ Alle Einträge von A sind positiv.
    - ☐ $\operatorname{Spur} A > 0$
    - ☐ $A - I$ ist positiv-definit.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Konstruiere eine 2×2 Matrix A mit den folgenden Eigenwerten und -vektoren:

$$\mathbf{v}_1 = (1,0)^T, \lambda_1 = 1, \mathbf{v}_2 = (1,1)^T, \lambda_2 = 2$$

Überprüfe das Resultat.