

Blatt 9

Abgabe bis Mittwoch, den 12. Januar 2011 um 12:00

Die Lösungen bitte im **Postfach** von Dr. Konrad Rieck abgeben.**Kernfunktionen**

1. Für $\lambda_1, \lambda_2, \dots \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_i \geq 0$ und Funktionen $\psi_1, \psi_2, \dots$ der Form $\psi_i : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{X} \times \mathcal{X} &\rightarrow \mathbb{R} \\ k(x, y) &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \psi_i(x) \psi_i(y) \end{aligned}$$

Dabei sind die Werte λ_i so gewählt, dass der Ausdruck auf der rechten Seite immer endlich ist. Zeige, dass für jede Wahl von Punkten $x_1, \dots, x_n$ die Kernmatrix $K = (k(x_i, x_j))_{i,j=1}^n$ symmetrisch und positiv semi-definit ist. **(10 Punkte)**

2. Wir betrachten eine Polynomkern k vom Grad d

$$k(x, y) = (\langle x, y \rangle + 1)^d$$

für zweidimensionale Daten $x, y \in \mathbb{R}^2$. Gib einen expliziten Merkmalsraum $\mathcal{F}$ und eine Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{F}$ an, so dass

$$k(x, y) = \langle \phi(x), \phi(y) \rangle.$$

Bei dieser Aufgabe könnte der binomische Satz

$$(a + b)^d = \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} a^{d-k} b^k.$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{N}$ hilfreich sein **(10 Punkte)**.

3. Hat man zwei Mercerkerne k und k' , so lassen sich daraus weitere Kerne zusammenbauen. Zeige, dass

- (a) $m(x, z) = c \cdot k(x, z)$ für $c \geq 0$,
- (b) $m(x, z) = k(x, z) + k'(x, z)$,
- (c) $m(x, z) = k(x, z) \cdot k'(x, z)$

jeweils auch wieder Mercerkerne sind. Verwende für den dritten Teil die Eigenzerlegung der Kernmatrizen von K und K' , d.h. $K = V \Lambda V^T = \sum_i \lambda_i v_i v_i^T$ wobei λ_i Eigenwerte und v_i Eigenvektoren sind. **(10 Punkte)**

Für Fragen zum Übungsblatte bitte in der Google Group <http://groups.google.com/group/ml-tu> registrieren und die Frage an die Mailingliste stellen.