Übung zur Vorlesung

Maschinelles Lernen 1

Wintersemester 2010/2011

Abteilung Maschinelles Lernen
Institut für Softwaretechnik und theoretische Informatik
Fakultät IV, Technische Universität Berlin
Prof. Dr. Klaus-Robert Müller
Email: klaus-robert.mueller@tu-berlin.de

Blatt 3

Abgabe bis Mittwoch, den 17. November 2010 bis 13 Uhr bei Konrad Rieck (FR 6061) oder in sein Fach in FR6052.

Auf diesem Aufgabenblatt soll die Hauptkomponentenzerlegung für einige einfache zweidimensionale Beispiele von Hand berechnet werden.

Zur Erinnerung: Um die Eigenvektoren einer Matrix auszurechnen, stellt man das charakteristiche Polynom

$$\chi(A) = \det(A - \lambda I)$$

auf und löst dann die Gleichung $\chi(A) = 0$. Beachte, dass für zweidimensionale Matrizen die Determinante eine besonders einfache Form hat:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Um dann noch die Eigenvektoren auszurechnen, löst man die Gleichung

$$Ax = \lambda x$$

für die bereits gefundenen Eigenwerten λ.

1. Wir betrachten die Mixtur zweier Gaussverteilungen mit Parametern

$$\mu_1 = (0,1)^\top, \qquad \Sigma_1 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\mu_2 = (1,0)^\top, \qquad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Punkte werden jeweils gleichmäßig von den beiden Verteilungen gezogen.

(a) **(10 Punkte)** Zeige generell, dass für die Kovarianzmatrix von Mischverteilungen die folgende Gleichung gilt. Es sei $p(x)$ eine Mischverteilung mit Dichte

$$p(x) = \sum_{i=1}^{k} \pi_i p_i(x)$$

mit $\sum_{i=1}^{k} \pi_i = 1$ und $\pi_i \geq 0$, und p_i seien irgendwelche Dichten. Zeige, dass

$$\mathbb{E}_p\Big((X - \mathbb{E}_p(X))(X - \mathbb{E}_p(X)^\top\Big) = \sum_{i=1}^{k} \pi_i \mathbb{E}_{p_i}((X-\mu)(X-\mu)^\top),$$
$$\text{mit } \mu = \sum_{i=1}^{k} \pi_i \mathbb{E}_{p_i}(X).$$

wobei $\mathbb{E}_p$ der Erwartungswert bezüglich der Verteilung p ist. (Hinweis: Schreibe den Erwartungswert als Integral und beachte die Rechenregeln für Integrale)

(b) **(10 Punkte)** Berechne die Hauptkomponenten durch Eigenzerlegun der Kovarianzmatrix für obige Gaussmixturverteilung und skizziere das Ergebnis.

(c) **(10 Punkte)** Berechne die Hauptkomponenten für eine Gaussverteilung mit

$$\mu = (5,2)^\top, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ohne die Kovarianzmatrix zu zentrieren, d.h. durch Eigenzerlegung von $\mathbb{E}(XX^\top)$. (Hinweis: Da für Gaussverteilungen $\mathrm{Cov}(X) = \mathbb{E}(XX^\top) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X)^\top = \Sigma$ folgt, dass $\mathbb{E}(XX^\top) = \Sigma - \mu\mu^\top$.)

Für Fragen zum Übungsblatte bitte in der Google Group http://groups.google.com/group/ml-tu registrieren und die Frage an die Mailingliste stellen.