Übung zur Vorlesung

Maschinelles Lernen 1

Wintersemester 2009/2010

Abteilung Maschinelles Lernen
Institut für Softwaretechnik und
theoretische Informatik
Fakultät IV, Technische Universität Berlin
Prof. Dr. Klaus-Robert Müller
Email: klaus-robert.mueller@tu-berlin.de

Blatt 3

Abgabe bis Donnerstag, den 5. November 2009 in der Übung.

Aufgaben

Auf diesem Aufgabenblatt soll die Hauptkomponentenzerlegung für einige einfache zweidimensionale Beispiele von Hand berechnet werden.

Zur Erinnerung: Um die Eigenvektoren einer Matrix auszurechnen, stellt man das charakteristiche Polynom

$$\chi(A) = \det(A - \lambda I)$$

auf und löst dann die Gleichung $\chi(A) = 0$. Beachte, dass für zweidimensionale Matrizen die Determinante eine besonders einfache Form hat:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Um dann noch die Eigenvektoren auszurechnen, löst man die Gleichung

$$Ax = \lambda x$$

für die bereits gefundenen Eigenwerten λ.

1. Wir betrachten die Mixtur zweier Gaussverteilungen mit Parametern

$$\mu_1 = (0,1)^\top, \qquad \Sigma_1 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mu_2 = (1,0)^\top, \qquad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Punkte werden jeweils gleichmäßig von den beiden Verteilungen gezogen.

(a) **(10 Punkte)** Zeige generell, dass für die Kovarianzmatrix von Mischverteilungen die folgende Gleichung gilt. Es sei $p(x)$ eine Mischverteilung mit Dichte

$$p(x) = \sum_{i=1}^{k} \pi_i p_i(x)$$

mit $\sum_{i=1}^{k} \pi_i = 1$ und $\pi_i \geq 0$, und p_i seien irgendwelche Dichten. Zeige, dass

$$\mathbb{E}_p\Big((X - \mathbb{E}_p(X))(X - \mathbb{E}_p(X)^\top\Big) = \sum_{i=1}^{k} \pi_i \mathbb{E}_{p_i}((X-\mu)(X-\mu)^\top),$$

$$\text{mit } \mu = \sum_{i=1}^{k} \pi_i \mathbb{E}_{p_i}(X).$$

wobei $\mathbb{E}_p$ der Erwartungswert bezüglich der Verteilung p ist. (Hinweis: Schreibe den Erwartungswert als Integral und beachte die Rechenregeln für Integrale)

(b) **(10 Punkte)** Berechne die Hauptkomponenten durch Eigenzerlegun der Kovarianzmatrix für obige Gaussmixturverteilung und skizziere das Ergebnis.

(c) **(10 Punkte)** Berechne die Hauptkomponenten für eine Gaussverteilung mit

$$\mu = (5,2)^\top, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ohne die Kovarianzmatrix zu zentrieren, d.h. durch Eigenzerlegung von $\mathbb{E}(XX^\top)$. (Hinweis: Da für Gaussverteilungen $\mathrm{Cov}(X) = \mathbb{E}(XX^\top) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X)^\top = \Sigma$ folgt, dass $\mathbb{E}(XX^\top) = \Sigma - \mu\mu^\top$.)

Für Fragen zum Übungsblatte bitte in der Google Group http://groups.google.com/group/mikiobraun-lehre registrieren und die Frage an die Mailingliste stellen.