Übung zur Vorlesung

Maschinelles Lernen 2

Sommersemester 2007

Abteilung Maschinelles Lernen
Institut für Softwaretechnik und theoretische Informatik
Fakultät IV, Technische Universität Berlin
Prof. Dr. Klaus-Robert Müller
Email: krm@cs.tu-berlin.de

Blatt 3

Abgabe 15. Mai 2007 in der Vorlesung, oder bis 23:59:59 Uhr bei `mikio@cs.tu-berlin.de`

Die Aufgaben können auch in Gruppen bearbeitet werden, allerdings sollte die Gruppenzusammenstellung über des Semster stabil bleiben.

Aufgaben

Auf diesem Aufgabenblatt sollen einige der Konzepte zur Optimierung vertieft werden.

1. **Optimierungsprobleme (10 Punkte)** Wir betrachten das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \text{minimiere } & f(x,y) \\ \text{unter den Bedingungen} & 2x + y \geq 1 \\ & x + 3y \geq 1 \\ & x \geq 0, y \geq 0. \end{aligned}$$

Zeichnen Sie den Satz der zulässigen (x,y) ("feasible set"). Ermitteln Sie für jede der folgenden Wahlen von f die Lösungsmenge und den Wert:

$$\begin{array}{llll} (i) & f(x,y) = x + y, & (ii) & f(x,y) = -x - y, \\ (iii) & f(x,y) = x, & (iv) & f(x,y) = \max(x,y), \\ (v) & f(x,y) = x^2 + 9y^2. & & \end{array}$$

2. **Lineare Optimierungsprobleme (10 Punkte)** Zeige, daß die folgenden Linearen Programme alle ineinander überführbar sind:

$$\begin{array}{llll} (i) & \max\{cx \mid Ax \leq b\} & (ii) & \max\{cx \mid x \geq 0, Ax \leq b\} \\ (iii) & \max\{cx \mid x \geq 0, Ax = b\} & (iv) & \min\{cx \mid Ax \geq b\} \\ (v) & \min\{cx \mid x \geq 0, Ax \geq b\} & (vi) & \min\{cx \mid x \geq 0, Ax = b\} \end{array}$$

3. **Geometrische Interpretation von Dualität (10 Punkte)** Wir betrachten das Lineare Programm $\max\{cx \mid Ax \leq b\}$. Das hierzu duale Lineare Programm lautet $\min\{yb \mid y \geq 0, yA = c\}$. Leite die LP Dualitätsbedingung

$$\max\{cx \mid Ax \leq b\} = \min\{yb \mid y \geq 0, yA = c\}$$

geometrisch her.

Gehe dabei wie folgt vor:

- Interpretiere die Bedingung $Ax \leq b$ als Schnittmengen von Halbräumen $a_1 x \leq b_1, \ldots, a_n x \leq b_n$ (jede dieser Bedingung definiert Punkt, die auf einer Seite einer Hyperebene liegen), wobei die a_i die Zeilen von A sind. Zeige, daß die Normalenvektoren *nach außen* zeigen.
- Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß im Optimumspunkt alle Nebenbedingungen mit Gleichheit erfüllt werden, also $Ax = b$. Zeichne die Situation im Optimumspunkt auf, und argumentiere, warum der Vektor c als *positive* Linearkombination der a_i, dargestellt werden kann: $c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ mit $\lambda_i \geq 0$.
- Folgere hieraus, daß λ ein zulässiger Punkt des dualen Problems ist, und daher

$$\lambda b \geq \min\{yb \mid y \geq 0, yA = c\}.$$

- Zeige schließlich, daß

$$\max\{cx \mid Ax \leq b\} \leq \min\{yb \mid y \geq 0, yA = c\},$$

indem Du zeigst, daß $cx \leq yb$.