Mathematische Grundlagen
für Maschinelles Lernen

Sommersemester 2014

Fachgebiet Maschinelles Lernen
Institut für Softwaretechnik und theoretische Informatik
Fakultät IV, Technische Universität Berlin
Prof. Dr. Klaus-Robert Müller

Tag 1: Euklidische Vektorräume

Übungsaufgaben

Aufgabe 1

1. Das kartesische Produkt $A_1 \times \cdots \times A_n$ von Mengen $A_1, \ldots, A_n$ ist definiert als

   - ☐ $A_1 \times \cdots \times A_n := A_1 \setminus (A_2 \cup \ldots \cup A_n)$
   - ☐ $A_1 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, \ldots, a_n) | a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$
   - ☐ $A_1 \times \cdots \times A_n := \{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n | a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$

2. Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann besteht $\mathbb{R}^n$ aus

   - ☐ n reellen Zahlen
   - ☐ n-Tupeln reeller Zahlen
   - ☐ n-Tupeln von Vektoren

3. Sei G eine Gruppe mit der Verknüpfung $* : G \times G \mapsto G$. Dann heisst G abelsch, wenn

   - ☐ $a * (b * c) = (a * b) * c$ mit $a, b, c \in G$
   - ☐ $a * b = b * a$ mit $a, b \in G$
   - ☐ $a' * a = e$ mit $a', a, e \in G$

4. Welcher der folgenden Mengen bildet zusammen mit der entsprechenden Addition und Skalarmultiplikation keinen reellen Vektorraum?

   - ☐ Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$
   - ☐ Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$
   - ☐ Die Menge der reellwertigen, stetigen Funktionen $\{f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} |$ f stetig $\}$

5. Sei K ein Körper mit den üblichen zwei Verknüpfungen. Welche Eigenschaft besitzt K nicht?

   - ☐ Wenn die "Multiplikation" von zwei Elementen aus K das neutrale Element ergibt, dann folgt daraus, dass mind. einer der Faktoren das neutrale Element ist
   - ☐ Das neutrale Element der "Addition" und der "Multiplikation" können übereinstimmen
   - ☐ Es gelten die Distributivgesetze

6. Eine skalare Multiplikation ist in einem reellen Vektorraum V gegeben durch eine Abbildung

   ☐ $V \times V \mapsto \mathbb{R}$ ☐ $\mathbb{R} \times V \mapsto V$ ☐ $\mathbb{R} \times V \mapsto \mathbb{R}$

7. Wieviele Unterräume hat $\mathbb{R}^2$?

   - ☐ zwei: $\{0\}$ und $\mathbb{R}^2$
   - ☐ vier: $\{0\}$, $\mathbb{R} \times \{0\}$, $\{0\} \times \mathbb{R}$ (die Achsen), $\mathbb{R}^2$
   - ☐ unendlich viele

8. Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ ist kein Untervektorraum?

☐ $\{0\}$ ☐ $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | x_1 = 2x_2\}$ ☐ $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | x_1 = x_2 + 1\}$

9. Für welche der folgende Objekte hat die Aussage einen Sinn, sie seien "linear unabhängig"?

   ☐ $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ Elemente eines Vektorraums

   ☐ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ reelle Zahlen

   ☐ Die Linearkombination $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n$

10. Welche der folgenden Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$?

    ☐ $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

11. Ein Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum V ist ein Abbildung

    ☐ $\mathbb{R} \times V \mapsto V$ ☐ $V \times V \mapsto \mathbb{R}$ ☐ $V \mapsto V \times V$

12. Was ist das Skalarprodukt der folgenden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$?

    ☐ 3 ☐ 5 ☐ 7

13. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

    ☐ In jedem euklidischen Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ erfüllt $\sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ die Eigenschaften einer Norm.

    ☐ In jedem euklidischen Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \geq 0$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

    ☐ Sei M eine Teilmenge eines euklidischen Vektorraumes $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Dann ist

    $$\{\mathbf{v} \in V | \forall \mathbf{u} \in M : \mathbf{v} \perp \mathbf{u}\}$$

    ein Untervektorraum von V.

Aufgabe 2

Zeige: Ist $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ eine Orthonomalbasis eines euklidischen Vektorraums $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, so gilt für jedes $\mathbf{x} \in V$:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i$$

Hinweis: Auf jeden Fall ist $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n$ darstellbar. Zeige nun, dass $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle = \lambda_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Aufgabe 3

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und U ein r -dimensionaler Untervektorraum mit einer Orthonormalbasis $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$. Die orthogonale Projektion eines Vektors $\mathbf{v} \in V$ auf U ist gegeben durch

$$p(\mathbf{v}) := \sum_{i=1}^{r} \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i$$

1. Berechne die orthogonale Projektion des Vektoren $(25, 0)^T$ auf den von dem Vektor $(3, 4)^T$ aufgespannten Raum und zeichne die Vektoren in eine Graphik.

2. Sei $\mathbf{x} \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige:

   $$p(\lambda \mathbf{x}) = \lambda p(\mathbf{x}).$$

3. Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Zeige:

   $$p(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = p(\mathbf{x}) + p(\mathbf{y}).$$

Aufgabe 4

Wie sieht eine Elipse in $\mathbb{R}^2$ mit 1-Norm, 2-Norm und max-Norm aus? Eine Elipse ist die Menge aller Punkte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$, für die die Summe der Abstände zu zwei gegebenen Punkten $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ gleich einem Radius r ist. Skizziere eine Graphik für den Fall $\mathbf{a} = (-1, 0)^T$, $\mathbf{b} = (1, 0)^T$ und $r = 4$.

Aufgabe 5

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^n$.

1. Zeige, dass die Abbildung

$$k(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto (\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle)^2 \in \mathbb{R}$$

   kein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert.

2. Wir betrachten die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ mit

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto (x_1^2, x_2^2, \sqrt{2} x_1 x_2) \in \mathbb{R}^3.$$

   Zeige:

$$\langle \Phi(\mathbf{x}), \Phi(\mathbf{y}) \rangle = k(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Aufgabe 6

Die 1-Norm wird oft benutzt, um bei Optimierungen auf dünn-besetze Lösungen (Einträge mit vielen Nullen) zu kommen. In dieser Aufgabe soll das veranschaulicht werden.
Gesucht sei der Vektor $\mathbf{w} = (x, y)^T$, der das Optimierungsproblem

$$\max_{\mathbf{w}} f(\mathbf{w}) \qquad s.t \quad \|\mathbf{w}\| = 1$$

löst. Wir betrachten $f(x, y) = 0.5 \cdot x + y$ und wollen die Lösung des Optimierungsproblems für die 1-Norm und die 2-Norm vergleichen.

1. Zeichne in der x-y-Ebene alle Punkte, für die die 2-Norm 1 ist.

$$C_2 := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 | \; \|(x, y)^T\|_2 = x^2 + y^2 = 1\}.$$

2. Zeichne alle Punkte, für die die 1-Norm 1 ist.

$$C_1 := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 | \; \|(x, y)^T\|_1 = |x| + |y| = 1\}.$$

3. Zeichne Höhenlinien $c = f(x, y)$ für $c = 0.5$, $c = 1$ und $c = 1.1$.

4. Wo liegt, rein graphisch betrachtet, die Lösung des Optimierungsproblems für die 1-Norm? Wo für die 2-Norm?

Aufgabe 7

Sei V ein Vektorraum und $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ eine Basis. Das heisst, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sind linear unabhängig und jedes $\mathbf{v} \in V$ lässt sich als Linearkombination der $\mathbf{v}_i$ darstellen. Es existieren also $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ so das $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n$ gilt.
Zeige: Zu jedem $\mathbf{v} \in V$ sind die $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt.

Aufgabe 8

Gegeben sind Trainingsdaten (rot und blau). Mittels kNN sollen nun ein noch nicht gesehener Datenpunkt (grün) klassifiziert werden. Welches Label wird diesem zugewiesen für $k \in 1, 2, 5$?