

Tag 3: Eigenwerte und Eigenvektoren

Hausaufgaben

Abgabeschluss für diese Aufgaben ist morgen um 10:00 Uhr.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

1. Wenn $A(-\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ dann ist
 - \mathbf{v} Eigenvektor zum Eigenwert λ
 - $-\mathbf{v}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ
 - $-\mathbf{v}$ Eigenvektor zum Eigenwert $-\lambda$
2. Sei A eine $n \times n$ quadratische Matrix mit r paarweise voneinander verschiedenen Eigenwerten. Dann ist die Dimension des von allen Eigenvektoren von A aufgespannten Raumes
 - gleich r
 - $\leq r$
 - $\geq r$
3. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und es gelte $A = ZBZ^{-1}$ für eine invertierbare Matrix $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann haben A und B
 - Die gleichen Eigenvektoren und Eigenwerte
 - Die gleichen Eigenwerte, aber nicht notwendigerweise gleiche Eigenvektoren
 - Die gleichen Eigenvektoren, aber nicht notwendigerweise gleiche Eigenwerte
4. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix. Dann haben A und A^{-1}
 - Die gleichen Eigenvektoren und Eigenwerte
 - Die gleichen Eigenwerte, aber nicht notwendigerweise gleiche Eigenvektoren
 - Die gleichen Eigenvektoren, aber nicht notwendigerweise gleiche Eigenwerte
5. Sei A eine quadratische Matrix und λ ein Eigenwert von A . Dann ist für jedes $p \in \mathbb{N}$
 - λ ein Eigenwert von A^p
 - λ^p ein Eigenwert von A^p
 - λ^{-p} ein Eigenwert von A^p
6. Sei A eine symmetrische $n \times n$ Matrix und seien $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ linear unabhängige Eigenvektoren von A mit $\|\mathbf{v}_i\| = 1$ für $i = 1, \dots, n$. Sei U die Matrix, deren Spalten $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ enthalten. Ist dann $U^T U = I$?
 - Ja, denn Eigenvektoren symmetrischer Matrizen stehen senkrecht aufeinander.
 - Nein, denn Vektorräume von Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert können mehrdimensional sein.
 - Ja, denn linear unabhängige Eigenvektoren stehen senkrecht aufeinander.

7. Eine symmetrische $n \times n$ Matrix A habe nur einen Eigenwert λ . Dann
- ist $n = 1$
 - ist A eine Diagonalmatrix.
 - ist A nicht invertierbar.
8. Die Eigenwerte einer symmetrischen $n \times n$ Matrix A seien alle 0. Dann
- ist $n = 1$.
 - ist A die Nullmatrix.
 - ist A eine Diagonalmatrix.
9. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und es gelte $A = ZBZ^{-1}$ für eine invertierbare Matrix $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?
- $\det A = \det B$
 - $\text{Spur } A = \text{Spur } B$
 - B symmetrisch $\Leftrightarrow A$ symmetrisch
10. Sei A eine positiv-definite Matrix. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?
- Alle Einträge von A sind positiv.
 - $\text{Spur } A > 0$
 - $A - I$ ist positiv-definit.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Konstruiere eine 2×2 Matrix A mit den folgenden Eigenwerten und -vektoren:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 2$$

Überprüfe das Resultat.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei A eine quadratische Matrix und \mathbf{v} ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ . Sei $\pi \in \mathbb{R}$. Gebe einen Eigenwert von $A - \pi I$ an.