Eigenwerte und Eigenvektoren

Irene Winkler

Arbeitsgruppe Maschinelles Lernen

28. März 2012

Einleitung

Definition. Ein *Eigenvektor* einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zum *Eigenwert* $\lambda \in \mathbb{C}$ ist ein Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ der durch A auf ein Vielfaches $\lambda \mathbf{v}$ von sich selbst abgebildet wird:

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

Eigenvektoren tauchen im Maschinellen Lernen ständig auf, denn...

- Jede symmetrische Matrix A (und damit insbesondere jede Kovarianzmatrix) lässt sich zerlegen in

$$A = U \Lambda U^T$$

wobei U eine orthogonale Matrix mit Eigenvektoren als Spalten und Λ die Diagonalmatrix mit den zugehörigen Eigenwerten auf der Diagonalen.

Eigenvektoren tauchen im Maschinellen Lernen ständig auf, denn...

- Eigenvektoren bilden Lösung eines sehr wichtigen Klasse von Optimierungsproblemen:

$$\max_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \qquad \text{(A symmetrisch)}$$

Maximum wird von vom Eigenvektor $\mathbf{v}$ zum größten Eigenwert λ_{max} angenommen.

$$\max_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{v}^T A \mathbf{v} = \lambda_{max} \mathbf{v}^T \mathbf{v} = \lambda_{max}$$

Berechnung

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix. Dann gilt für jeden Eigenvektor $\mathbf{v}$

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$$

$\Rightarrow (A - \lambda I)$ muss singulär sein

1. Berechne die Eigenwerte als Nullstellen des *characteristischen Polynoms* $P(\lambda) := \det(A - \lambda I)$. Dieses Polynom besitzt Grad n.
2. Bestimme für jeden der ermittelten reellen Eigenwerte λ_i eine Basis des Vektorraums $\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n | (A - \lambda_i I)\mathbf{v} = 0\}$.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix. Es gilt:

- Es gibt höchstens n reelle Eigenwerte und höchstens n linear unabhängige Eigenvektoren.
- Es muss nicht n linear unabhängige Eigenvektoren geben, selbst wenn es n reelle Nullstellen des characteristischen Polynoms gibt.
- Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.
- A besitzt n paarweise verschiedene Eigenwerte $\Rightarrow$ A besitzt n linear unabhängige Eigenvektoren

Diagonalisierbarkeit

Definition. Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *diagonalisierbar* falls es eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine Diagonalmatrix $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt, so dass

$$\Lambda = S^{-1}AS.$$

$A = S\Lambda S^{-1}$ nennt man auch *Eigenzerlegung* von A.

Es gilt:

- A besitzt n linear unabhängige Eigenvektoren
  $\Leftrightarrow$ A diagonalisierbar
- Die Spalten von S sind Eigenvektoren von A, die Diagonale von Λ enthält die zugehörigen Eigenwerte.

Eigenschaften diagonalisierbarer Matrizen

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalisierbar mit $A = S\Lambda S^{-1}$.

- Alle Eigenwerte $\neq 0 \Leftrightarrow A$ invertierbar und

$$A^{-1} = (S\Lambda S^{-1})^{-1} = S\Lambda^{-1}S^{-1}$$

- Diagonalisierung erleichtert Potenzierung von A:

$$A^p = S\Lambda^p S^{-1} \text{ für } p \in \mathbb{N}$$

- Die Determinante ist das Produkt der Eigenwerte.
- Die Spur ist die Summe der Eigenwerte.

Eigenvektoren und -werte symmetrischer Matrizen

Für jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

- Die Eigenwerte sind reell.
- Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.
- Es lassen sich immer n orthogonale Eigenvektoren finden.
- A lässt sich zerlegen in

$$A = U \Lambda U^T$$

  wobei U eine orthogonale Matrix mit Eigenvektoren als Spalten und Λ die Diagonalmatrix mit den zugehörigen Eigenwerten auf der Diagonalen.

Positiv-Definitheit

Definition. Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt

positiv definit	falls $\mathbf{v}^T A \mathbf{v} > 0$
positiv semidefinit	falls $\mathbf{v}^T A \mathbf{v} \geq 0$
negativ definit	falls $\mathbf{v}^T A \mathbf{v} < 0$
negativ semidefinit	falls $\mathbf{v}^T A \mathbf{v} \leq 0$
	für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Satz. Für jede symmetrische Matrix A gilt:

A positiv definit	$\Leftrightarrow$	alle Eigenwerte > 0
A positiv semidefinit	$\Leftrightarrow$	alle Eigenwerte ≥ 0
A negativ definit	$\Leftrightarrow$	alle Eigenwerte < 0
A negativ semidefinit	$\Leftrightarrow$	alle Eigenwerte ≤ 0

- Die wichtigsten Gleichungen für das Rechnen mit Matrizen:
  K. B. Petersen, M. S. Pedersen (2007) *The Matrix Cookbook.*
  `http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/views/publication_details.php?id=3274`