Mathematische Grundlagen
für Maschinelles Lernen

Sommersemester 2012

Fachgebiet Maschinelles Lernen
Institut für Softwaretechnik und
theoretische Informatik
Fakultät IV, Technische Universität Berlin
Prof. Dr. Klaus-Robert Müller

# Tag 4: Wahrscheinlichkeitsrechnung

## Übungsaufgaben

### Aufgabe 1

1. In einer Schachtel befinden sich 3 Münzen: eine faire, eine gezinkte die mit Wahrscheinlichkeit 0.75 Kopf ergibt, und eine gefälscht, die auf beiden Seiten einen Kopf zeigt. Es wird zufällig eine der drei Münzen gewählt und geworfen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kopf geworfen wird?

   □ $\frac{5}{12}$ □ $\frac{4}{9}$ □ $\frac{3}{4}$

2. Sei $X$ eine reellwertig Zufallsvariable, und $p$ ihre Dichtefunktion. Es gilt für alle $c \in \mathbb{R}$:

   □ $P(X \leq c) = p(x)$
   □ $P(X \leq c) = \int_{-\infty}^{c} p(x)dx$
   □ $P(X \leq c) = \int_{-\infty}^{c} xp(x)dx$

3. Die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen $X$ und $Y$ ist gegeben durch

$$p(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y} & \text{wenn } x, y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

   □ $X$ und $Y$ sind unabhängig.
   □ $X$ und $Y$ sind unkorreliert, aber nicht unabhängig.
   □ $X$ und $Y$ sind weder unkorreliert noch unabhängig.

4. Sei $X$ eine Zufallsvariable mit Dichte $p$ und sei $c > 0$ eine Konstante. Die Aussage "Die Zufallsvariable $cX$ besitzt die Dichtefunktion $cp$" ist

   □ richtig
   □ falsch
   □ nur richtig wenn $\text{Var}(X) = 1/c$ gilt.

5. Sei $X$ eine reellwertig Zufallsvariable, und $p$ ihre Dichtefunktion. Der Erwartungswert von $X^2$, $\mathbb{E}(X^2)$ ist definiert als

   □ $$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x^2)dx$$ □ $$\int_{-\infty}^{\infty} x^2p(x^2)dx$$ □ $$\int_{-\infty}^{\infty} x^2p(x)dx$$

6. Eine Zufallsvariable $X$ sei gleichverteilt auf dem Intervall 0 bis 3. Berechne $\mathbb{E}(X^2)$.

   □ $\frac{1}{3}$ □ 3 □ 9

7. Sei $X$ eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}(X) = 1$ und $\text{Var}(X) = 5$. Dann ist $\mathbb{E}((2+X)^2)$ gleich

   □ 8 □ 12 □ 14

8. Sei $X$ eine eindimensionale Zufallsvariable und $c \in \mathbb{R}$. Es gelte $\text{Var}(X+c) = \text{Var}(x) + \text{Var}(c)$. Daraus folgt

   □ nichts, denn $\text{Var}(X+c) = \text{Var}(x) + \text{Var}(c)$ gilt immer.
   □ $c = 0$.
   □ $\text{Var}(X+c) = 0$.

9. Sei $X \in \mathbb{R}^2$ eine zweidimensionale Zufallsvariable mit Kovarianzmatrix $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Dann gilt

   □ $\text{Corr}(X_1, X_2) = -0,25$
   □ $\text{Corr}(X_1, X_2) = -0.5$
   □ $\text{Corr}(X_1, X_2) = -1$

10. Sei $X$ eine reelwertige Zufallsvariable, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $Y = \alpha X$. Dann gilt

   □ $\text{Corr}(X, Y) = \alpha$
   □ $\text{Corr}(X, Y) = \text{sign}(\alpha)$
   □ $\text{Corr}(X, Y) = 1$

## Aufgabe 2

Ein bestimmtes Krebsdiagnoseverfahren liefert in 98 Prozent aller Fälle das richtige Ergebnisse. Tatsächlich sind 0.1 Prozent der Bevölkerung krebskrank. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine getestete Person an Krebs erkrankt ist, unter der Bedingung, dass dies der Test ergab?

## Aufgabe 3

Es seien $X, Y$ zwei Zufallsvariablen mit den möglichen Werten 0,1 und 2 sowei der gemeinsamen Verteilung gemäß der folgenden Tabelle

| $P(X,Y)$ | Y=0 | Y=1 | Y=2 |
|---|---|---|---|
| X=0 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 0 |
| X=1 | 0 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |
| X=2 | 0 | 0 | $\frac{1}{5}$ |

1. Berechne die Randverteilungen von $X$ und $Y$, $P(X)$ und $P(Y)$.
2. Berechne die Posteriorverteilung von $X$, $P(X|Y)$.
3. Sind $X$ und $Y$ unabhängig?
4. Berechne die Erwartungswerte und Varianzen von $X$ und $Y$ und überprüfe, dass $X$ und $Y$ die gleiche Varianz besitzen.

## Aufgabe 4

Die Zufallsvariablen $X$ sei exponentialverteilt[1] zum Parameter $\lambda$. Die Dichte der Exponentialverteilung ist definiert durch

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{wenn } 0 \leq x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1. Verifiziere, dass $p(x)$ eine Dichte ist.
2. Berechne die Verteilungsfunktion $F$ von $X$.
3. Zeichne die Dichte von $X$ und die Verteilungsfunktion von $X$ für $\lambda = 1$ in eine Graphik ein.

## Aufgabe 5

Seien $X$ und $Y$ zwei eindimensionale Zufallsvariablen und $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Man zeige:

1. $\operatorname{Cov}(aX + b, cY + d) = ac \operatorname{Cov}(X, Y)$.
2. $\operatorname{Var}(X + Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + 2 \cdot \operatorname{Cov}(X, Y)$.
   *Hinweis: Wegen 1. kann man hier o.B.d.A* $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$ *annehmen.*

## Aufgabe 6

Sei $X \in \mathbb{R}^n$ eine mehrdimensionale Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mathbb{E}(X) = 0$ und der Kovarianzmatrix $\Sigma := \mathbb{E}(XX^T)$. Sei $\Sigma = U\Lambda U^T$ eine Eigenzerlegung von $\Sigma$ (d.h. $\Lambda$ ist eine Diagonalmatrix und $U$ ist eine orthogonale Matrix). Wir definieren die Zufallsvariable $Y \in \mathbb{R}^n$ durch $Y := \sqrt{\Lambda} U^T X$.
Zeige, dass $Y$ unkorreliert ist und jedes $Y_i$ die Varianz 1 besitzt, d.h. zeige dass

$$\mathbb{E}(YY^T) = I$$

.

[1] Die Exponentialverteilung wird zur Modellierung der Dauer zufälliger Zeitintervalle, wie z.B. der Zeit zwischen zwei Anrufen, oder der Lebensdauer von Bauteilen, benutzt.