

Tag 1: Euklidische Vektorräume

Übungsaufgaben

Aufgabe 1

- Das kartesische Produkt $A_1 \times \dots \times A_n$ von Mengen A_1, \dots, A_n ist definiert als
 - $A_1 \times \dots \times A_n := A_1 \setminus (A_2 \cup \dots \cup A_n)$
 - $A_1 \times \dots \times A_n := \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$
 - $A_1 \times \dots \times A_n := \{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$
- Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann besteht \mathbb{R}^n aus
 - n reellen Zahlen
 - n -Tupeln reeller Zahlen
 - n -Tupeln von Vektoren
- Welcher der folgenden Mengen bildet zusammen mit der entsprechenden Addition und Skalarmultiplikation keinen reellen Vektorraum?
 - Die ganzen Zahlen \mathbb{Z}
 - Die komplexen Zahlen \mathbb{C}
 - Die Menge der reellwertigen, stetigen Funktionen $\{f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$
- Eine skalare Multiplikation ist in einem reellen Vektorraum V gegeben durch eine Abbildung
 - $V \times V \mapsto \mathbb{R}$
 - $\mathbb{R} \times V \mapsto V$
 - $\mathbb{R} \times V \mapsto \mathbb{R}$
- Wieviele Unterräume hat \mathbb{R}^2 ?
 - zwei: $\{0\}$ und \mathbb{R}^2
 - vier: $\{0\}$, $\mathbb{R} \times \{0\}$, $\{0\} \times \mathbb{R}$ (die Achsen), \mathbb{R}^2
 - unendlich viele
- Welche der folgenden Teilmengen des \mathbb{R}^2 ist kein Untervektorraum?
 - $\{0\}$
 - $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 2x_2\}$
 - $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2 + 1\}$
- Für welche der folgende Objekte hat die Aussage einen Sinn, sie seien "linear unabhängig"?
 - $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ Elemente eines Vektorraums
 - $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ reelle Zahlen
 - Die Linearkombination $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n$

8. Welche der folgenden Vektoren bilden eine Basis des \mathbb{R}^2 ?

$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

9. Ein Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum V ist ein Abbildung

$\mathbb{R} \times V \mapsto V$ $V \times V \mapsto \mathbb{R}$ $V \mapsto V \times V$

10. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

- In jedem euklidischen Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ erfüllt $\sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ die Eigenschaften einer Norm.
- In jedem euklidischen Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \geq 0$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$
- Sei M eine Teilmenge eines euklidischen Vektorraumes $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Dann ist

$$\{\mathbf{v} \in V \mid \forall \mathbf{u} \in M : \mathbf{v} \perp \mathbf{u}\}$$

ein Untervektorraum von V .

Aufgabe 2

Wie sieht eine Ellipse in \mathbb{R}^2 mit 1-Norm, 2-Norm und max-Norm aus? Eine Ellipse ist die Menge aller Punkte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, für die die Summe der Abstände zu zwei gegebenen Punkten \mathbf{a} und \mathbf{b} gleich einem Radius r ist. Zeichne eine Graphik für den Fall $\mathbf{a} = (-1, 0)^T$, $\mathbf{b} = (1, 0)^T$ und $r = 4$.

Aufgabe 3

Die 1-Norm wird oft benutzt, um bei Optimierungen auf dünn-besetzte Lösungen (Einträge mit vielen Nullen) zu kommen. In dieser Aufgabe soll das veranschaulicht werden.

Gesucht sei der Vektor $\mathbf{w} = (x, y)^T$, der das Optimierungsproblem

$$\max_{\mathbf{w}} f(\mathbf{w}) \quad s.t. \quad \|\mathbf{w}\| = 1$$

löst. Wir betrachten $f(x, y) = 0.5 \cdot x + y$ und wollen die Lösung des Optimierungsproblems für die 1-Norm und die 2-Norm vergleichen.

1. Zeichne in der x-y-Ebene alle Punkte, für die die 2-Norm 1 ist.

$$C_2 := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)^T\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} = 1\}.$$

2. Zeichne alle Punkte, für die die 1-Norm 1 ist.

$$C_1 := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)^T\|_1 = |x| + |y| = 1\}.$$

3. Zeichne die Höhenlinie $c = f(x, y)$ für $c = 0.5$, $c = 1$ und $c = 1.1$.

4. Wo liegt, rein graphisch betrachtet, die Lösung des Optimierungsproblems für die 1-Norm? Wo für die 2-Norm?

Aufgabe 4

Sei V ein Vektorraum und $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ eine Basis. Das heisst, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sind linear unabhängig und jedes $\mathbf{v} \in V$ lässt sich als Linearkombination der \mathbf{v}_i darstellen. Es existieren also $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ so das $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n$ gilt.

Zeige: Zu jedem $\mathbf{v} \in V$ sind die $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt.

Aufgabe 5

Zeige: Ist $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ eine Orthonormalbasis eines euklidischen Vektorraums $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, so gilt für jedes $\mathbf{x} \in V$:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i$$

Aufgabe 6

Berechne die orthogonale Projektion des Vektoren $(25, 0)^T$ auf den von dem Vektor $(3, 4)^T$ aufgespannten Raum und zeichne die Vektoren in eine Graphik.

Berechne außerdem die orthogonale Projektion der Vektoren $(1, 0)^T$ und $(0, 1)^T$ auf den von dem Vektor $(3, 4)^T$ aufgespannten Raum.