Mathematische Grundlagen
für Maschinelles Lernen

Sommersemester 2012

Fachgebiet Maschinelles Lernen
Institut für Softwaretechnik und
theoretische Informatik
Fakultät IV, Technische Universität Berlin
Prof. Dr. Klaus-Robert Müller

Tag 2: Matrizen

Übungsaufgaben

Aufgabe 1

1. Eine Abbildung $f : V \mapsto W$ zwischen zwei reellen Vektorraeumen V und W ist linear, wenn

   □ $f(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda f(\mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{y})$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

   □ f eine Matrix ist

   □ Das Bild von f ein Untervektorraum von W ist.

2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$

   □ $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ □ $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

3. Für welche der folgenden 3×3 Matrizen A gilt $AB = BA = B$ für alle $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

   □ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ □ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ □ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ 2×3- Matrizen. Dann ist

   □ $A + B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

   □ $A + B \in \mathbb{R}^{4\times 6}$

   □ $A + B \in \mathbb{R}^{4\times 9}$

5. Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt:

   □ A hat m Zeilen und n Spalten

   □ A hat n Zeilen und m Spalten

   □ Die Zeilen von A haben die Länge m und die Spalten von A haben die Länge n.

6. Welche der folgenden Eigenschaften hat die Matrixmultiplikation nicht:

   □ Assoziativität

   □ Kommutativität

   □ Distributivität

7. Für jede quadratische $n \times n$ Matrix A gilt

   □ $\operatorname{rang} A = n \Rightarrow A$ ist invertierbar, aber es gibt invertierbare A mit $\operatorname{rang} A \neq n$

   □ A ist invertierbar $\Rightarrow \operatorname{rang} A = n$, aber es gibt A mit $\operatorname{rang} A = n$, die nicht invertierbar sind.

   □ $\operatorname{rang} A = n \Leftrightarrow A$ ist invertierbar

8. Welche der folgenden Aussagen ist für alle $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ richtig:
   - □ $\det(A+B) = \det A + \det B$
   - □ $\det \lambda A = \lambda \det A$
   - □ $\det(ABC) = \det A \det B \det C$
9. Welche der folgenden Aussagen ist für alle invertierbaren $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ richtig:
   - □ $\det(A^{-1}BA) = \det A \det B$
   - □ $\det(A^{-1}BA) = \det A$
   - □ $\det(A^{-1}BA) = \det B$
10. $\det \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix} =$

    □ 0 □ λ □ λ^3

Aufgabe 2

Beschreibe in Worten oder als Graphik, welche Abbildung durch die folgenden Matrizen beschrieben werden. Berechne ihre Determinanten.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Sei $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix, d.h. $RR^T = R^T R = I$. Man zeige: Die Multiplikation mit A ist invariant gegenüber der Bildung des Standardskalarprodukts zweier Vektoren, d.h. $\langle R\mathbf{x}, R\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$

Aufgabe 4

1. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine rechteckige Matrix. Welche Dimensionalität haben $A^T A$ und AA^T?
2. Sind $A^T A$ und AA^T symmetrisch?
3. Seien $B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrische Matrizen. Ist das Produkt BC symmetrisch?

Aufgabe 5

1. Konstruiere die Matrix 2×2 Matrix P, die die orthogonale Projektion auf den von dem Vektor $(3, 4)^T$ aufgespannten Raum beschreibt.
2. Berechne das Produkt $P \cdot P$

Aufgabe 6

Zeige dass jede quadratische Matrix M als Summe einer symmetrischen Matrix M_s und einer antisymmetrischen Matrix M_a geschrieben werden kann, d.h. $M = M_s + M_a$ mit $M_s^T = M_s$ und $M_a^T = -M_a$

Hinweis: Konstruiere eine symmetrische und eine antisymmetrische Matrix ausgehend von M. Drücke dafür zuerst M^T in Abhängigkeit von M_s und M_a aus. Drücke dann M_s in Abhängigkeit von M und M^T aus.