

Tag 3: Eigenwerte und Eigenvektoren

Übungsaufgaben

Aufgabe 1

1. Damit von den Eigenwerten einer reellen Matrix A überhaupt gesprochen werden kann, muss A
 - symmetrisch sein.
 - invertierbar sein.
 - quadratisch sein.
2. Welcher der folgenden Vektoren ist Eigenvektor von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?
 - $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. Das charakteristische Polynom von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch?
 - $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 10$
 - $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 10$
 - $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$
4. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ eine reelle Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Dann gilt
 - Über die Dimension des von den Eigenvektoren zum Eigenwert λ aufgespannte Raum kann nichts gesagt werden, außer dass sie ≥ 1 und $\leq n$ ist.
 - Es gibt höchstens n Eigenvektoren mit Norm 1 zum Eigenwert λ .
 - Es gibt unter Umständen gar keine Eigenvektoren zum Eigenwert λ .
5. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix dessen charakteristischen Polynoms n reelle Nullstellen hat. Dann gilt
 - A ist diagonalisierbar.
 - A ist genau dann diagonalisierbar wenn die Nullstellen paarweise voneinander verschieden sind.
 - Wenn die Nullstellen paarweise voneinander verschieden sind ist A diagonalisierbar. Die Rückrichtung gilt aber nicht.
6. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix dessen charakteristischen Polynoms n reelle Nullstellen hat. Dann gilt
 - A ist symmetrisch.
 - Wenn A außerdem symmetrisch ist, so stehen die Eigenvektoren von voneinander verschiedenen Eigenwerten senkrecht aufeinander.
 - Wenn A außerdem symmetrisch ist, so sind die Nullstellen paarweise voneinander verschieden sind.

7. Sei A eine invertierbare Matrix und λ ein Eigenwert von A . Dann ist
- λ ein Eigenwert von A^{-1}
 - $-\lambda$ ein Eigenwert von A^{-1}
 - $1/\lambda$ ein Eigenwert von A^{-1}
8. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix und $p \in \mathbb{N}$. Dann haben A und A^p
- Die gleichen Eigenvektoren und Eigenwerte
 - Die gleichen Eigenwerte, aber nicht notwendigerweise gleiche Eigenvektoren
 - Die gleichen Eigenvektoren, aber nicht notwendigerweise gleiche Eigenwerte
9. Eine Eigenzerlegung einer reellen symmetrischen Matrix A durchzuführen bedeutet
- Eine symmetrische Matrix U zu finden, so dass $U^{-1}AU$ eine Diagonalmatrix ist.
 - Eine orthogonale Matrix U zu finden, so dass $U^{-1}AU$ eine Diagonalmatrix ist.
 - Eine invertierbare Matrix U zu finden, so dass $U^{-1}AU$ eine Diagonalmatrix ist.
10. Welche der folgenden Matrizen ist positiv-definit?

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

 $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Berechne die Determinante und die Spur der Matrix.

Aufgabe 3

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix und $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, mit $\lambda \neq \mu$. Zeige: v und w sind linear unabhängig.

Aufgabe 4

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix und $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, mit $\lambda \neq \mu$. Zeige: \mathbf{v} und \mathbf{w} sind orthogonal, d.h. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$.

Hinweis: $\lambda \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \dots$

Aufgabe 5

Ziel dieser Aufgabe ist es, die lineare Abbildung, die durch $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ beschrieben wird, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, zu visualisieren. Zwei orthogonale Eigenvektoren von A sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, die dazugehörigen Eigenwerte 1 und 3. Es gibt also die Eigenzerlegung $A = U\Lambda U^T$ mit $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe ist es, das Abbild des Einheitskreises $\mathcal{C} = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ visualisieren.

1. Zeichne den Einheitskreis \mathcal{C} .
2. Was ist U^T für eine Transformation?
Zeichne das Abbild des Einheitskreises nach Anwendung von U^T ,

$$M_1 := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{y} = U^T \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathcal{C}\}.$$

3. Was ist Λ für eine Transformation?

Zeichne das Abbild des Einheitskreises nach Anwendung von ΛU^T ,

$$M_2 := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{y} = \Lambda U^T \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathcal{C}\}.$$

4. Was ist U für eine Transformation?

Zeichne das Abbild des Einheitskreises nach Anwendung von $A = U\Lambda U^T$,

$$M_3 := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{y} = U\Lambda U^T \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathcal{C}\}.$$

5. Zeichne die Richtungen der Eigenvektoren

Aufgabe 6

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Zeige:

1. Gibt es eine reelle quadratische Matrix B , so dass $A = B^T B$, dann ist A positiv semi-definit.
2. Ist A positiv-semidefinit, dann gibt es eine reelle quadratische Matrix B mit $A = B^T B$.

Hinweis: Konstruiere B aus der Eigenzerlegung von A .