

Tag 2: Matrizen

Hausaufgaben

Abgabeschluss für diese Aufgaben ist morgen um 10:00 Uhr.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

1. Welche der folgenden Aussagen ist falsch: Ist $f : V \mapsto W$ eine lineare Abbildung, so gilt
 - $f(\lambda \mathbf{x}) = f(\lambda) + f(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$
 - $f(0) = 0$
 - $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in V$
2. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (x + y, y - x) \in \mathbb{R}^2$ ist durch die folgende Matrix gegeben:
 - $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
3. Welches der folgenden Produkte von Matrizen ist Null:
 - $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$
4. Der Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ ist
 - 1
 - 3
 - 4
5. Für jede symmetrische, invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ gilt:
 - $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, A\mathbf{w} \rangle$
 - $\langle A\mathbf{v}, A\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
 - $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{w} \rangle$
6. Die Determinante ist eine Abbildung
 - $\mathbb{R}^{n \times n} \mapsto \mathbb{R}^{n-1}$, die das Volumen der Projektion auf \mathbb{R}^{n-1} angibt.
 - $\mathbb{R}^{n \times n} \mapsto \mathbb{R}$, die linear in den Zeilen ist, für nicht invertierbare Matrizen verschwindet und für I den Wert 1 annimmt.
 - $\mathbb{R}^{n \times n} \mapsto \mathbb{R}^n$, die linear in den Zeilen ist, für nicht invertierbare Matrizen verschwindet und für I den Wert 1 annimmt.
7. Welche der folgenden Aussagen ist richtig: Für jede quadratische $n \times n$ Matrix A gilt
 - $\det A = 0 \Rightarrow \text{rang } A = 0$
 - $\det A = 0 \Leftrightarrow \text{rang } A < n$
 - $\text{rang } A = n \Rightarrow \det A = n$

8. Welche der folgenden Matrizen ist orthogonal:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

9. Es seien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt des \mathbb{R}^n und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine beliebige quadratische Matrix mit vollem Rang. Welche der folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ nach \mathbb{R} definiert ein Skalarprodukt auf dem \mathbb{R}^n ?

$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle$ für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

$h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \langle A\mathbf{x}, A^T\mathbf{y} \rangle$ für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

10. Welche der folgenden Mengen von $n \times n$ Matrizen bildet zusammen mit der Matrixaddition und Skalarmultiplikation keinen reellen Vektorraum?

Die symmetrischen Matrizen $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | A^T = A\}$

Die orthogonalen Matrizen $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | AA^T = A^T A = I_n\}$

Die oberen Dreiecksmatrizen $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | A_{ij} = 0 \text{ für } i > j\}$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Beschreibe in Worten, welche Abbildung durch die folgenden Matrizen beschrieben werden. Wie groß sind ihre Determinanten?

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$