

## Blatt 4 - Finance Faktormodelle und EM

Abgabe bis Montag, 16. Mai 2011, 12:00 Uhr, Briefkasten bei Raum FR6061

**Aufgabe 1: Optimierung eines Portfolios mit festem erwartetem Ertrag** Für ein Set von  $N$  Aktien wird das Portfolio  $\mathbf{p}$  gesucht, welches bei einem erwarteten Ertrag von  $r_{\text{target}}$  minimales Risiko aufweist. Das Risiko wird hierbei durch die Varianz des Portfolios gemessen. Gegeben sei der Vektor der Erwartungswerte der Erträge der einzelnen Aktien  $\mathbf{r}_{\text{exp}} = E[\mathbf{r}]$  sowie die Kovarianzmatrix  $C = E[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{exp}})(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{exp}})^T]$ .

1. (5 Punkte) Formuliere das Optimierungsproblems. Wie lautet die Kostenfunktion? Wie die Randbedingung?
2. (5 Punkte) Löse das Optimierungsproblem mithilfe des Lagrange-Formalismus

**Aufgabe 2: Schätzen einer t-Verteilung mittels Expectation-Maximization** In Finanzanwendungen ist die Annahme normalverteilter Erträge in Faktoranalyse und probabilistischer PCA in der Regel nicht zutreffend. Eine mögliche Alternative ist die Verwendung von t-Verteilungen.

Im folgenden beschränken wir uns darauf, eine Maximum Likelihood Schätzung der t-Verteilung von  $N$  Datenpunkten  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \in \mathbb{R}^D$ , durchzuführen. Dazu nutzen wir die Eigenschaft, dass die t-Verteilung als eine besondere Mischung von Gaussverteilungen interpretierbar ist: Um einen Vektor  $\mathbf{t}$  aus der t-Verteilung  $t(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \nu)$  zu erzeugen, erzeugen wir erst einen Skalar  $\tau$  aus der Gammaverteilung  $G(\nu/2, \nu/2)$ ,

$$p(\tau)_{G(\alpha, \beta)} = \frac{\beta^\alpha \tau^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \exp(-\beta\tau). \quad (1)$$

Hierbei ist  $\Gamma(\alpha)$  die Gamma-Funktion. Deren Form spielt hier keine Rolle, sie stellt lediglich die Normierung der Wahrscheinlichkeitsdichte dar. Mit diesem  $\tau$  lässt sich  $\mathbf{t}$  mittels der Normalverteilung  $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}/\tau)$  generieren.

Nehmen wir also ein *Modell mit latenten Variablen* an, in dem zu jeder normalverteilten Beobachtung  $\mathbf{x}_n$  eine Gamma-verteilte latente Variable  $\tau_n$  gehört.

1. (5 Punkte) Zeige, dass die Log-Likelihood der Daten

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \tau, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \nu) &= \ln \prod_{n=1}^N p(\mathbf{x}_n, \tau_n | \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \nu) \\ &= \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{D-2}{2} \ln \tau_n - \frac{1}{2} \ln \det(\boldsymbol{\Sigma}) - \frac{D}{2} \ln 2\pi - \frac{\tau_n}{2} (\mathbf{x}_n - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_n - \boldsymbol{\mu}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu}{2} \left( \ln \frac{\nu}{2} + \ln \tau_n - \tau_n \right) - \ln \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

lautet.

2. (5 Punkte) Formuliere den Maximization-Step. Leite dazu nach den Parametern  $\Sigma$ ,  $\mu$  und  $\nu$  ab.

Hinweise:

- Die Gleichung für  $\nu$  lässt sich nicht geschlossen lösen, gib hier nur die vereinfachte Gleichung an. In der Praxis ist eine Approximation oder numerische Lösung notwendig.
- Nutze die Matrixableitungen

$$\frac{\partial \ln |\det(\mathbf{X})|}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{X}^{-1\top} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{a}^\top \mathbf{X}^{-1} \mathbf{b}}{\partial \mathbf{X}} = -\mathbf{X}^{-1\top} \mathbf{a} \mathbf{b}^\top \mathbf{X}^{-1\top} \quad (3)$$

3. (5 Punkte) Interpretiere die Gleichungen für  $\Sigma$  und  $\mu$ .
4. (5 Punkte) Im Expectation-Step bestimmen wir die für den Maximization-Step notwendigen Erwartungswerte. Hier benötigen wir die Erwartungswerte  $E[\tau_n | \mathbf{x}_n]$  und  $E[\ln(\tau_n) | \mathbf{x}_n]$ . Zeige dafür, dass  $p(\tau_n | \mathbf{x}_n)$ , der posterior von  $\tau_n$ , wieder Gamma-verteilt ist – man, sagt, die Gammaverteilung ist ein konjugierter Prior für die Skalierung der Kovarianzmatrix einer Normalverteilung.

Hinweis: Bedenke, dass sich die Normierung aus Gleichung (1) ergibt und alle nicht von  $\tau_n$  abhängigen Terme ignoriert werden können.

Nutze dann

$$Y \sim G(\alpha, \beta) \Rightarrow \begin{cases} E[Y] = & \alpha / \beta \\ -E[\ln(Y)] = & \psi(\alpha) - \ln(\beta) \end{cases} \quad (4)$$

wobei  $\psi(y)$  die Digamma-Funktion  $\Gamma'(y) / \Gamma(y)$  ist.

---

Für Fragen zum Übungsblatt bitte in der Google Group <http://groups.google.com/group/ml-tu> registrieren und die Fragen an die Mailingliste stellen.