Übung zur Vorlesung

Maschinelles Lernen 2

Sommersemester 2011

Abteilung Maschinelles Lernen
Institut für Softwaretechnik und
theoretische Informatik
Fakultät IV, Technische Universität Berlin
Prof. Dr. Klaus-Robert Müller
Email: klaus-robert.mueller@tu-berlin.de

Blatt 1

Abgabe bis Montag, 18. April 2011, 12:00 Uhr, Briefkasten bei Raum FR6061

Zur Erinnerung: In LLE wird zunächst jeder Datenpunkt $X_1, \ldots, X_n$ als gewichtetes Mittel seiner Nachbarn $N_i \subseteq \{1, \ldots, n\}$ dargestellt: Es wird die Gewichtsmatrix W bestimmt, die

$$E(W) = \sum_{i=1}^{n} \left\| X_i - \sum_{j=1}^{n} W_{ij} X_j \right\|^2$$

minimiert mit den Randbedingungen

$$j \notin N_i \Rightarrow W_{ij} = 0 \text{ für alle i = 1,..., n}$$
$$\sum_j W_{ij} = 1 \text{ mit i = 1,..., n}$$

1. **(Invarianzen, 15 Punkte)** Die Gewichte W_{ij} sind invariant unter Skalierung, Translation und Rotation. Zeige dies, indem Du nachweisst, dass sich das Minimum der Energiefunktion nicht ändert für
   (a) $X_i \to \alpha X_i$, für ein $\alpha > 0$
   (b) $X_i \to X_i + t$, für einen Vektor t
   (c) $X_i \to U X_i$ (wobei U eine orthogonale Matrix ist, d.h. $U^T U = I$)
2. **(Gewichte, 15 Punkte)** Für einen Datenpunkt X_i sei $w = (W_{iN_{i1}}, \ldots, W_{iN_{ik}})$ der Vektor, der aus den Gewichten seiner k Nachbarn N_i besteht.
   (a) Zeige, dass die optimalen Gewichte durch Lösen des folgenden Optimierungsproblems gefunden werden können:
   $$\min_w \quad w^\top C\, w$$
   $$\text{mit} \quad \sum_{j=1}^{k} w_j = 1$$
   wobei die Matrix C folgende Einträge hat
   $$C_{jl} = (X_i - X_{N_{ij}})^\top (X_i - X_{N_{il}}).$$
   (b) Zeige durch die Einführung von Lagrangemultiplikatoren, dass obiges Optimierungsproblem gelöst wird durch
   $$w = \frac{(C)^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^\top (C)^{-1}\mathbf{1}},$$
   wobei $\mathbf{1}$ ein Vektor ist, dessen Einträge alle 1 sind.

Für Fragen zum Übungsblatt bitte in der Google Group http://groups.google.com/group/ml-tu registrieren und die Fragen an die Mailingliste stellen.