Maschinelles Lernen 2

Sommersemester 2010

Abteilung Maschinelles Lernen
Institut für Softwaretechnik und theoretische Informatik
Fakultät IV, Technische Universität Berlin
Prof. Dr. Klaus-Robert Müller
Dr. Mikio L. Braun, Dr. Konrad Rieck
Email: klaus-robert.mueller@tu-berlin.de

Blatt 13

Abgabe bis Montag, 12. Juli 2010, 13:00 Uhr bei Dr. Konrad Rieck (rieck@cs.tu-berlin.de)

Auf diesem Aufgabenblatt sollen die in der Vorlesung eingeführten Begriffe wir Dualität und Dualitätslücke an einem konkreten Problem untersucht werden.

1. **Geometrische Interpretation (10 Punkte)** Betrachte das folgende Optimierungsproblem:
$$\max_{\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^n,\lambda\in\mathbb{R}} \lambda \qquad \text{so dass} \qquad \begin{aligned} \|\boldsymbol{w}\|^2 &\leq 1\,, \\ \lambda &\leq \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x}_i\,, \quad i=1,\ldots,m\,. \end{aligned} \tag{1}$$
wobei $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1,\ldots,m$, Vektoren sind, so dass es ein $\hat{\boldsymbol{w}}$ gibt, welches $\hat{\boldsymbol{w}}^T\boldsymbol{x}_i > 0$ für $i = 1,\ldots,m$ erfüllt.
   - Zeige, dass das Optimierungsproblem (1) konvex ist.
   - Das Problem lässt sich so interpretieren, dass man zu gegebenen Punkten $\boldsymbol{x}_i$ eine Hyperebene durch den Nullpunkt sucht, die durch $\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x} = 0$ definiert ist. Welche Hyperebene wird durch das Optimierungsproblem beschrieben?

   (*Hinweis:* In einem ersten Schritt könnte man für festes $\boldsymbol{w}$ überlegen, wie das maximale λ aussieht. Beachte auch, dass für $\|\boldsymbol{w}\| = 1$, $\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x}$ den Abstand von $\boldsymbol{x}$ von der Hyperebene angibt.)

2. **Lagrange-Dualität (10 Punkte)** Wir betrachten jetzt das folgende Optimierungsproblem:
$$\min_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^m} \left\|\sum_{i=1}^m \alpha_i\boldsymbol{x}_i\right\| \qquad \text{so dass} \qquad \begin{aligned} \sum_{i=1}^m \alpha_i &= 1\,, \\ \alpha_i &\geq 0\,, \quad i=1,\ldots,m\,, \end{aligned} \tag{2}$$
   - Zeige, dass das Problem (2) zu Problem (1) dual ist, und zeige, dass die Dualitätslücke ("duality gap") null ist.
   - Probelm (2) kann so interpretiert werden, dass man einen Punkt aus der konvexen Hülle der Punkte $\boldsymbol{x}_i$ sucht. Welcher Punkt wird durch das Problem beschrieben?

   (*Hinweis:* Der Lagrangefaktor für die Nebenbedingung $\|\boldsymbol{w}\|^2 \leq 1$ verschwindet nicht sofort in der Rechnung, kann aber ganz zum Schluss explizit maximiert werden.)

3. **Implementation (10 Punkte)** Schreibe eine Matlabfunktion `problem2.m`, die das Problem (2) mit Hilfe von `QUADPROG` löst. Schreibe, ein weiteres Skript `toybeispiel.m`, das ein zwei-dimensionales Toy-Beispiel erzeugt und es löst. Visualisiere die primale und die duale Lösung.

Für Fragen zum Übungsblatte bitte in der Google Group http://groups.google.com/group/mikiobraun-lehre registrieren und die Frage an die Mailingliste stellen.