Übung zur Vorlesung

Maschinelles Lernen 2

Sommersemester 2009

Abteilung Maschinelles Lernen
Institut für Softwaretechnik und
theoretische Informatik
Fakultät IV, Technische Universität Berlin
Prof. Dr. Klaus-Robert Müller
Email: krm@cs.tu-berlin.de

Blatt 1

Abgabe bis Montag, 26. April 2009, 13:00 Uhr
im Sekretariat FR6052, oder bei Mikio Braun, FR6058.

Aufgaben

Zur Erinnerung: In LLE wird zunächst jeder Datenpunkt $X_1, \ldots, X_n$ als gewichtetes Mittel seiner Nachbarn $N_i \subseteq \{1, \ldots, n\}$ dargestellt: Es wird die Gewichtsmatrix W bestimmt, die

$$\text{energy}(W) = \sum_{i=1}^{n} \left\| X_i - \sum_{j=1}^{n} W_{ij} X_j \right\|^2$$

minimiert mit den Randbedingungen

$$j \notin N_i \Rightarrow W_{ij} = 0 \qquad \text{für alle i = 1,..., n}$$
$$\sum_j W_{ij} = 1. \qquad \text{mit i = 1,..., n}$$

1. **(Invarianzen, 15 Punkte)** Es wurde behauptet, dass die Gewichte W_{ij} invariant unter Skalierung, Translation und Skalierung sind. Zeige dies, indem Du nachgeweist, dass sich das Minimum der Energiefunktion nicht ändert, wenn man

   (a) $X_i \to \alpha X_i$, für ein $\alpha > 0$

   (b) $X_i \to X_i + t$, für einen Vektor t,

   (c) $X_i \to U X_i$ (wobei U eine orthogonale Matrix ist, d.h. $U^T U = I$.)

   ersetzt.

2. **(Berechnung der Gewichte, 15 Punkte)** Für ein festes i sei $w^i = (W_{iN_{i1}}, \ldots, W_{iN_{ik_i}})$ der Vektor, der aus den Einträgen in der $i$ten Zeile von W besteht, die einem Nachbar zugeordnet sind. Hierbei bezeichnet k_i die Anzahl der Nachbarn von X_i.

   (a) Zeige, dass die optimalen Gewichte durch Lösen des folgenden Optimierungsproblems gefunden werden können:

   $$\min_{w^i} \quad w_i^t C^i w^i$$
   $$\text{so dass} \quad \sum_{j=1}^{k_i} w_j^i = 1$$

   mit

   $$C^i = \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{\ell=1}^{k_i} (X_i - X_{N_{ij}})^t (X_i - X_{N_{i\ell}}).$$

   (b) Zeige durch die Einführung von Lagrangemultiplikatoren, dass obiges Optimierungsproblem gelöst wird durch

   $$w^i = \frac{(C^i)^{-1} I}{I^t (C^i)^{-1} I},$$

   wobei I ein Vektor ist, dessen Einträge alle 1 sind.