

## Übungsblatt 6: Belief Propagation

**Abgabeschluss:** Montag, der 28. Juli 2008 um 10:00 Uhr.

Für dieses Aufgabenblatt sind sowohl Code als auch eine schriftliche Ausarbeitung abzugeben. Der Code und eine elektronische Version der Ausarbeitung (als PDF) muss über PASS abgegeben werden (siehe link auf der Website). Zusätzlich ist ein Ausdruck der Ausarbeitung abzugeben, entweder in der Veranstaltung oder über unser Sekretariat.

### Aufgaben

#### Teil 1: Implementation

In den folgenden beiden Aufgaben sollen zwei verschiedene Methoden zur Marginalisierung in Markov-Random-Fields (MRF) implementiert werden. Die Ein- und Ausgabeparameter haben jedoch dieselbe Bedeutung; fuer ein MRF mit  $n$  latenten Variablen und jeweils  $k$  Zuständen sind die Eingabeparameter wie folgt definiert:

- $\mathbf{A}$  ist eine  $(n \times n)$ -Adjazenzmatrix welche die Graphenstruktur der  $n$  latenten Variablen definiert.
- $\mathbf{E}$  ist eine  $(k \times n)$ -Matrix welche die Evidenz fuer jede latente Variable enthaelt, d.h. der  $(i, j)$ -te Eintrag von  $\mathbf{E}$  ist der Wert  $\phi_j(i)$ .
- $\mathbf{L}$  ist eine  $(k \times k)$ -Matrix welche die Kopplungen (compatibility function) der latenten Variablen enthaelt, d.h. der  $(i, j)$ -te Eintrag von  $\mathbf{L}$  ist  $\psi(i, j) = \psi_{i,i'}(i, j)$  fuer beliebige Variablen  $X_i, X_{i'}$ . Es handelt sich hier also um ein vereinfachtes MRF, bei der jede Kante des Graphen die gleiche compatibility Funktion repräsentiert.

Das Ergebnis beider Funktionen ist:

- $\mathbf{m}$  ist eine  $(k \times n)$ -Matrix deren  $i$ -te Spalte die normierte Randverteilung von  $x_i$  ist, d.h. der  $(i, j)$ -te Eintrag von  $\mathbf{m}$  ist  $p(X_j = i | Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n)$  und  $\sum_{i=1}^k m_{ij} = 1$  fuer alle Variablen  $j$ .

#### Aufgabe 1 (5 Punkte)

Implementiere eine Funktion

$$\mathbf{m} = \text{simple\_marg}(\mathbf{A}, \mathbf{E}, \mathbf{L})$$

welche fuer das durch  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{L}$  definierte MRF die Randverteilungen aller latenten Variablen  $x_1, \dots, x_n$  durch einfache Summierung berechnet, d.h. unter Verwendung der Summenregel

$$p(x_i = k | \dots) \propto \sum_{x_1=1}^k \cdots \sum_{x_{i-1}=1}^k \sum_{x_{i+1}=1}^k \cdots \sum_{x_n=1}^k p(x_1, \dots, x_{i-1}, k, x_{i+1}, \dots, x_n | \dots).$$

#### Aufgabe 2 (15 Punkte)

Implementiere Marginalisierung durch Belief Propagation als Funktion

$$\mathbf{m} = \text{bp}(\mathbf{A}, \mathbf{E}, \mathbf{L})$$

Teste Deine Implementation, indem Du die Ergebnisse mit `simple_marg` vergleichst.

### Aufgabe 3 (10 Punkte)

Entwickle und Implementiere eine Methode zum Entrauschen von binären Bildern (Pixel haben die Werte  $\{0, 1\}$ ) mittels Belief Propagation als Funktion

$$Id = \text{bp\_denoising}(I, \text{err\_p}, \text{smooth\_p})$$

mit den Parametern

- $I$  ist eine  $(n \times m)$ -Matrix welche das zu entauschende binäre Bild enthält.
- $\text{err\_p}$  ist ein Parameter im Intervall  $[0, 1]$ , welcher der Wahrscheinlichkeit im verwendeten Modell entspricht, dass ein Pixel verrauscht ist.
- $\text{smooth\_p}$  ist ein Parameter im Intervall  $[0, 1]$ , welcher proportional ist zur Wahrscheinlichkeit im verwendeten Modell, dass ein Pixel den gleichen Wert hat wie sein Nachbar.

Der Rückgabeparameter  $Id$  ist das entauschte Bild als  $(n \times m)$ -Matrix wobei der  $(i, j)$ -te Eintrag von  $Id$  die Wahrscheinlichkeit (im Modell) ist, dass dieser Pixel den Wert 1 hat.

Prinzipiell gibt es zwei Ansätze, wie Markov-Random-Fields zum Entrauschen von Bildern eingesetzt werden können.

- Die Nachbarschaftsbeziehungen zwischen Pixeln werden korrekt als Graph abgebildet, d.h. ein Pixel ist, sofern er sich nicht am Rand befindet, adjazent zu vier bzw. acht anderen Pixeln. Da der Graph dann kein Baum mehr ist, muss Loopy Belief Propagation zur Berechnung der Randverteilungen verwendet werden. Im wesentlichen bedeutet das, ein geeignetes Verfahren zur Auswahl der zu sendenden messages und ein Konvergenzkriterium zu entwickeln.
- Die Nachbarschaftsbeziehungen werden durch einen kreisfreien Graphen unvollständig abgebildet. In diesem Fall kann Belief Propagation zur Marginalisierung verwendet werden. Es kann von Vorteil sein, die Ergebnisse über unterschiedliche Varianten von Nachbarschaftsgraphen zu mitteln.

In beiden Fällen wird es vermutlich nicht möglich sein, die allgemeine Implementation von BP aus Aufgabe 2 zu verwenden, da der Speicherbedarf für die Adjazenzmatrix zu groß ist.

Beschreibe das von Dir verwendete Verfahren in der Ausarbeitung.

## Teil 2: Anwendung

### Aufgabe 4 (10 Punkte)

Führe einen experimentellen Vergleich der Laufzeit der beiden Methoden zur Marginalisierung auf künstlichen MRFs durch. Gib die Struktur der verwendeten MRFs an. Erstelle einen Plot, in dem die benötigte Laufzeit der Methoden vs. die Größe des gewählten MRFs aufgetragen ist.

### Aufgabe 5 (10 Punkte)

Verwende Dein image denoising Verfahren, um die auf der Website verfügbaren binären Bilder zu entauschen. Verrausche die Bilder, in dem Du mit Wahrscheinlichkeit  $p$  den Wert eines Pixels umdrehst. Untersuche das Verhalten Deiner Methode in Abhängigkeit vom noise-level  $p$  und den Parametern  $\text{err\_p}$  und  $\text{smooth\_p}$ . Illustriere die Wirkungsweise der Methode durch Plots von verrauschten und entauschten Bildern.