

Blatt 7Abgabe: 3. Juni 2008, bis 12.15 h bei Mikio Braun (mikio@cs.tu-berlin.de)

Praktische Abgaben über PASS

(<https://ml01.zrz.tu-berlin.de/~mikio/pass.pl?conf=blatt6.conf>)Verwende Matlab oder Octave, welches unter www.octave.org frei verfügbar ist.**Aufgaben**

Auf diesem Aufgabenblatt sollen die in der Vorlesung eingeführten Begriffe wie Dualität und Dualitätslücke an einem konkreten Problem untersucht werden.

1. **Geometrische Interpretation (5 Punkte)** Betrachte das folgende Optimierungsproblem

$$\max_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}} \lambda \quad \text{so dass} \quad \begin{aligned} \|\mathbf{w}\|^2 &\leq 1, \\ \lambda &\leq \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (1)$$

wobei $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, m$, Vektoren sind, so dass es ein $\hat{\mathbf{w}}$ gibt, welches $\hat{\mathbf{w}}^T \mathbf{x}_i > 0$ für $i = 1, \dots, m$ erfüllt.

Gib eine geometrische Interpretation des Problems (1) und zeige, dass es konvex ist.

(*Hinweis:* In einem ersten Schritt könnte man für festes \mathbf{w} überlegen, wie das maximale λ aussieht. Beachte auch, dass für $\|\mathbf{w}\| = 1$, $\mathbf{w}^T \mathbf{x}$ den Abstand von \mathbf{x} von der Hyperebene angibt.)

2. **Lagrange-Dualität (15 Punkte)** Zeigen, dass das folgende Problem

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}^m} \left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i \right\| \quad \text{so dass} \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^m \alpha_i &= 1, \\ \alpha_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (2)$$

dual zum Problem (1) ist. Gib eine geometrische Interpretation des Problems (2). Zeige, dass die Dualitätslücke ("duality gap") null ist.

(*Hinweis:* Der Lagrangefaktor für die Nebenbedingung $\|\mathbf{w}\|^2 \leq 1$ verschwindet nicht sofort in der Rechnung, kann aber ganz zum Schluss explizit maximiert werden.)

3. **Implementation (10 Punkte)** Schreibe eine Matlabfunktion `problem2.m`, die das Problem (2) mit Hilfe von `QUADPROG` löst. Schreibe, ein weiteres Skript `toybeispiel.m`, das ein zwei-dimensionales Toy-Beispiel erzeugt und es löst. Visualisiere die primale und die duale Lösung.